Serie 5

---

1. Beweisen Sie, daß die Gleichung

$$x = \frac{1}{10}\,\mathrm{e}^{-x^2 \sin\frac{1}{x}}, \quad x \in (0,1),$$

genau eine Lösung besitzt.

Hinweis: Bestimmen Sie zuerst ein kompaktes Teilintervall $M \subset]0,1[$so, dass $f(x) = \frac{1}{10}\,\mathrm{e}^{-x^2 \sin\frac{1}{x}} : M \to M$ abbildet. Um zu zeigen, dass die Abbildung kontrahierend ist, verwenden Sie den Mittelwertsatz.

2. Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal bezüglich $u \in \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig, gleichmässig in $t \in \mathbb{R}$. Es gelte weiter für ein $C \in \mathbb{R}$

$$|f(t,u)| \leq C|u| \log(1 + |u|^2),\ \forall (t,u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie: Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(t,u), \\ u(0) &= u_0, \end{aligned}$$

besitzt für alle $u_0 \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung $u \in C^1([0,\infty[;\mathbb{R}^n)$.

3. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y,z) = \begin{cases} xy(1+z^2)\sin\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right), & \text{falls } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ist f auf ganz $\mathbb{R}^3$ differenzierbar ?

4. Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar und homogen vom Grad α, d.h. es gilt

$$f(tx) = t^\alpha f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall t > 0.$$

Beweisen Sie die Euler'sche Relation

$$df(x)\,x = \alpha f(x).$$

5. Multiple Choice Aufgabe: Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ erklärt durch die Vorschrift

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- ◯ f ist im Punkt $(0,0)$ nicht partiell differenzierbar.
- ◯ f ist zweimal stetig partiell differenzierbar.
- ◯ $\partial_1\partial_2 f(0,0) \neq \partial_2\partial_1 f(0,0)$.
- ◯ f ist nicht stetig.

6. Zusatzaufgabe fürs Kolloquium: Konstruieren Sie iterativ eine Lösung des Anfangswertproblems (AWP)

$$u' = u^2, \qquad u(0) := u_0 := 1,$$

wie folgt: Definieren Sie

$$(\Phi(u))\,(t) := u_0 + \int_0^t u(\tau)^2 d\tau.$$

a) Bestimmen Sie für diesen Fall Konstanten $r_0 = r_0(u_0)$, $L = L(u_0, r_0)$ und $T > 0$ wie im Beweis vom Satz 3.3.1 (Picard–Lindelöf) so, dass $\Phi : M \to M$ kontrahierend ist.

b) Definieren Sie

$$u^{(0)}(t) = u_0 = 1, \quad \forall\, t \in \mathbb{R},$$
$$u^{(n+1)} = \Phi(u^{(n)}), \quad n \geq 0.$$

Zeigen Sie: Für $0 \leq t \leq T$ gilt

$$u^{(n)}(t) \longrightarrow \frac{1}{1-t} \quad (n \to \infty). \tag{1}$$

Hinweis: Benutzen Sie die Identität

$$(1 + t + \cdots + t^n)^2 = \sum_{k=0}^{n} (k+1)t^k + \sum_{k=n+1}^{2n} (2n-k+1)t^k, \quad n \geq 0.$$

Mit Hilfe dieser Identität lässt sich Folgendes induktiv zeigen:

$$u^{(n)}(t) = 1 + t + \cdots + t^n + t^{n+1} p_n(t),$$

wobei $p_n(t)$ ein Polynom in t ist.

c) Für welche $T > 0$ ist die Konvergenz (1) gleichmässig auf $[0, T]$?

Abgabe: Montag 8. April 2013.