Serie 6

---

1. Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}^2$ differenzierbar ist.

b) Sind die partiellen Ableitungen von f überall stetig?

2. Es seien $f(u,v) := \log(u^2+v^2)$ für $u^2+v^2 > 0$, $g_1(x,y) := xy$, $g_2(x,y) := \frac{\sqrt{x}}{y}$ für $x, y > 0$. Weiter sei $\Phi(x,y) := f(g_1(x,y), g_2(x,y))$. Bestimmen Sie $d\Phi$ zuerst direkt und dann mittels der Kettenregel.

3. Die Abbildung $t \mapsto A(t)$ von einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ in den Raum der reellen $n \times n$ Matrizen sei differenzierbar, und $A(t)$ für alle $t \in I$ invertierbar. Zeigen Sie, dass $t \mapsto A(t)^{-1}$ differenzierbar ist und

$$\forall t \in I : \qquad \frac{\mathrm{d}(A^{-1})}{\mathrm{d}t} = -A^{-1}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\,A^{-1}.$$

4. Berechnen Sie die folgenden Wegintegrale im $\mathbb{R}^2$:

a) $\int_\gamma (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$, wobei γ die Parabel $y = x^2$ vom Punkt $(-1,1)$ zum Punkt $(1,1)$ durchläuft.

b) $\int_\gamma xy^2\,dy$, wobei γ die Ellipse $4x^2+y^2 = 4$ einmal im Gegenuhrzeigersinn durchläuft.

c) $\int_\gamma (x^2+y^2)\,dx + (x^2-y^2)\,dy$, wobei γ das Dreieck Δ mit den Eckpunkten $(0,0), (1,0)$ und $(0,1)$ einmal im Gegenuhrzeigersinn durchläuft.

5. Sei $\gamma \in C^1([0,1];\mathbb{R}^2)$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $0 \le t \le 1$, "geschlossen" mit $\gamma(0) = \gamma(1)$. Sei weiter λ die 1-Form $\lambda(x,y) = y\,dx$ auf $\mathbb{R}^2$, und sei J die Matrix

$$J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$A(\gamma) := \int_\gamma \lambda = \frac{1}{2}\int_0^1 (J\dot{\gamma}, \gamma)\,dt,$$

wobei $(\cdot,\cdot)$ das Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.

6. Multiple Choice Aufgabe: Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- ◯ Wenn f differenzierbar ist, dann ist f stetig partiell differenzierbar.
- ◯ Wenn f stetig partiell differenzierbar ist, dann ist f differenzierbar und stetig.
- ◯ Wenn alle partiellen Ableitungen existieren, dann ist f stetig.
- ◯ Wenn alle partiellen Ableitungen existieren, dann ist f differenzierbar.

Abgabe: Montag 15. April 2013.