Serie 7

---

1. Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ der Weg $\gamma(t) = (t^3, t^2+t, t)$ von $\gamma(0) = (0,0,0)$ nach $\gamma(1) = (1,2,1)$. Berechnen Sie

$$\int_\gamma v \cdot \overrightarrow{ds}$$

für die folgenden Vektorfelder $v(x,y,z)$ auf $\mathbb{R}^3$:

a) $$v(x,y,z) = (2xy^3, 3x^2y^2 + 2yz, y^2)^t;$$

b) $$v(x,y,z) = \left(x(y^2+z^2)+1, y(x^2+z^2), z(x^2+y^2)-1\right)^t;$$

c) $$v(x,y,z) = (x+z, x+y+z, x+z)^t.$$

Hinweis: Versuchen Sie zunächst, ein Potential durch Integration zu finden.

2. Sei $\Omega = M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Ist $p : \Omega \to \Omega$ bei $A_i \in \Omega$ lokal ein C^1-Diffeomorphismus?

a) $p(A) = A^k$ mit $k = 2, 3, \ldots$ und $A_1 = \mathbf{0}$, $A_2 = \mathbf{1}$,

b) $p(A) = A^2$, $n = 2$, und $A_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$,

c) $p(A) = (1+A)e^{-A}$ und $A_1 = \mathbf{0}$, $A_2 = \mathbf{1}$.

3. Das nichtlineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} e^{xy}\sin(x^2-y^2+x) &= 0 \\ e^{x^2+y}\cos(x^2+y^2) &= 1 \end{aligned}$$

besitzt die Lösung $x = y = 0$.
Zeigen Sie: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass das gestörte Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} e^{xy}\sin(x^2-y^2+x) &= \xi \\ e^{x^2+y}\cos(x^2+y^2) &= 1+\eta \end{aligned}$$

für alle (ξ,η) mit $\xi^2+\eta^2 < \varepsilon$ eine Lösung $(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$ besitzt, welche stetig von der Störung (ξ,η) abhängt.

4. **a)** Zeigen Sie: Die Gleichung $g(x,y) := x + y + yx^2 + y^3 = 0$ definiert implizit eine Funktion $y = h(x)$ in einer Umgebung von $x_0 = y_0 = 0$.

b) Berechnen Sie die Ableitung h'.

c) Zeigen Sie, dass sich h auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen lässt.

d) Folgern Sie, dass sich die Menge $g^{-1}(\{0\})$ global als Graph schreiben lässt.

5. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := \frac{x}{1+x^2+y^2}$. Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f und entscheiden Sie, ob an diesen lokale Extrema vorliegen.

6. Bestimmen Sie alle Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := x^2 + 2y^2 - x$ auf

a) dem Kreis $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$,

b) der Einheitskreisscheibe $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

7. Bestimmen Sie die Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) := x^3 + y + z^3$ unter den Nebenbedingungen

$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0,$$
$$g_2(x,y,z) = 2x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

8. **Multiple Choice Aufgabe:** Untersuchen Sie die Aussagen: Die Jacobi-Determinante der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\} \to \mathbb{R}^2,\ \binom{x}{y} \mapsto \binom{x^2-y^2}{2xy}$ ist gleich $4(x^2 + y^2)$ und somit strikt positiv; folglich ist f invertierbar.

◯ Alle diese Aussagen sind korrekt.

◯ Die Funktionaldeterminante hat einen anderen Wert.

◯ Die Funktionaldeterminante ist nicht überall positiv.

◯ Die Funktion f ist nur *lokal* umkehrbar.

9. **Programmieraufgabe in SAGE:** Erstellen Sie ein SAGE-Worksheet, welches

a) zu gegebenen $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des Gleichungssystems aus Aufgabe 3 in der (x,y)-Ebene darstellt.

b) die beiden Nebenbedingungen aus Aufgabe 7 als Flächen im Raum visualisiert.

Auf der Homepage von Josef Teichmann wird hierzu Beispielcode verfügbar sein.

Abgabe: Montag 29. April 2013.