Serie 9

---

1. Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Fubini die folgenden Integrale:

a) $$\int_Q y\sin(xy)\,d\mu, \qquad Q = [0,1]\times[0,\pi/2];$$

b) $$\int_Q \frac{x^2z^3}{1+y^2}\,d\mu, \qquad Q = [0,1]\times[0,1]\times[0,1];$$

c) $$\int_Q \frac{2z}{(x+y)^2}\,d\mu, \qquad Q = [1,2]\times[2,3]\times[0,2];$$

d) $$\int_Q \sin(x+y+z)\,d\mu, \qquad Q = [0,\pi]\times[0,\pi]\times[0,\pi];$$

e) $$\int_Q \frac{y}{\sqrt{4-x^2y^2}}\,d\mu, \qquad Q = [0,1]\times[0,1]\,.$$

2. Der *n-dimensionale Standardsimplex* Σ_n ist gegeben durch

$$\Sigma_n := \left\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n;\ x_i\geq 0, \sum_{i=1}^n x_i \leq 1\right\}.$$

Berechnen Sie

a) das Volumen von Σ_n.
Hinweis: Deuten Sie für $n\geq 2$ das Volumen als Integral der Funktion $f(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}) := 1-\sum_{i=1}^{n-1} x_i$.

b) das Integral

$$\int_{\Sigma_n} \exp\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)d\mu.$$

3. Betrachten Sie den Rotationskörper $\Omega = \{(x,y,0)\in[a,b]\times[0,\infty)\times\{0\}\ ;\ y\leq f(x)\}$, der durch Rotation einer stetigen Funktion $f:[a,b]\to[0,\infty)$ um die x-Achse entsteht.

a) Ist Ω Jordan-messbar?

b) Bestimmen Sie das Volumen $\mu(\Omega)$.

4. Bestimmen Sie das Volumen $\mu(B)$ der folgenden Menge (Skizze!):

$$B := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y+z \leq 2,\ x^2+y^2 \leq 1\right\}.$$

5. Kehren Sie in den folgenden Beispielen die Integrationsreihenfolge um:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2}\int_{-x}^{2-x^2} f(x,y)\,dy\,dx,$

b) $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{y^3}^{4\sqrt{2y}} f(x,y)\,dx\,dy,$

c) $\displaystyle\int_{-4}^{4}\int_{-\sqrt{4-|z|}}^{\sqrt{4-|z|}}\int_{-\sqrt{4-y^2-|z|}}^{\sqrt{4-y^2-|z|}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$

6. Finden Sie die globalen Extrema der Funktion $f(x,y,z) = x+y+z$ unter den Nebenbedingungen $x^2+y^2+z^2 = 1$ und $z \geq \frac{1}{2}$.

7. **Multiple Choice Aufgabe:** Das Integral der Funktion $f(x,y) := \sqrt{4-x^2-y^2}$ über die Menge $B := \left\{(x,y)\,|\,x,y \geq 0, x^2+y^2 \leq 4\right\}$ ist:

- ○ $\int_B f\,d\mu = \frac{2}{3}\pi$
- ○ $\int_B f\,d\mu = \frac{4}{3}\pi$
- ○ $\int_B f\,d\mu = \frac{16}{3}\pi$
- ○ $\int f\,d\mu = 8\pi$
- ○ $\int_B f\,d\mu = \frac{32}{3}\pi$

8. **Programmieraufgabe in SAGE:** Verwenden Sie SAGE, um die Integrationsbereiche in Aufgabe 5 zu visualisieren.

Abgabe: Montag 13. Mai 2013.