Serie 10

---

1. $\omega \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ sei definiert durch

$$\omega(x)(v_1, \ldots, v_{n-1}) := \det(x, v_1, \ldots, v_{n-1})$$

Beweisen Sie

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} x_i \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i-1} \wedge \mathrm{d}x_{i+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$$

2. Sei $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ die 1-Form

$$\omega := \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}$$

a) Beweisen Sie $\mathrm{d}\omega = 0$.

b) Berechnen Sie $\int_{S^1} \omega$ wobei $S^1 := \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1 \,\}$ der Einheitskreis mit Orientierung gegen den Uhrzeigersinn ist.

3. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $\phi : \mathbb{R}^m \to M$ eine glatte Abbildung. Sei $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$, $k > d$. Zeigen Sie $\phi^*\omega = 0$.

4. Für welche $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ ist die Menge

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, (y^2 - 2)(x^2 - 1) = c_1,\ y^2 + z = c_2\}$$

eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$?

5. Sei $M := \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = z,\ z < 1 \,\}$, wobei die Orientierung dadurch gegeben ist, dass $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2$ eine positiv orientierte Basis von $T_{(0,0,0)}M$ sein soll.

a) $\bar{M}$ ist eine Mannigfaltigkeit mit Rand. Geben Sie die Orientierung des Randes ∂M an, welche durch die Orientierung von M induziert wird.

b) Finden Sie eine Parametrisierung φ von ∂M, sodass $\dot{\varphi}$ positiv orientiert ist bezüglich der Orientierung aus (a).

6. **Multiple Choice Aufgabe:** Es ist eine Fläche S gegeben durch die Parameterdarstellung $(u, v) \to r(u, v)$. Die gleiche Fläche S sei auch durch die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ gegeben. Man betrachte einen festen Punkt P_0 auf der Fläche S; dabei gelte $\vec{OP_0} = r(u_0, v_0)$. Klicke die **richtige** Aussage an. Die Vektoren $\operatorname{grad} f|_{P_0}$ und $r_u(u_0, v_0) \times r_v(u_0, v_0)$

- ◯ sind parallel.
- ◯ stehen senkrecht aufeinander.
- ◯ sind weder parallel noch stehen sie senkrecht aufeinander.
- ◯ sind gleich.
- ◯ sind entgegengesetzt gleich.

Abgabe: Montag 20. Mai 2013.