Serie 11

---

1. Gegeben sei das ebene Dreieck $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ mit Ecken $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$. Es parametrisiere γ die Randkurve $\partial\Delta$ von $(1,0,0)$ über $(0,1,0)$ nach $(0,0,1)$ und zurück nach $(1,0,0)$. Berechnen Sie das Wegintegral $\int_\gamma K \cdot \overrightarrow{ds}$ für das Vektorfeld $K(x,y,z) := (x^2 - y + z, y^2 - z + x, z^2 - x + y)^T$

a) direkt als Linienintegral,

b) mit Hilfe des Satzes von Stokes.

c) Argumentieren Sie, warum der Satz von Stokes angewendet werden kann (Ecken!).

2. Betrachten Sie auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{z\text{−Achse}\}$ das Vektorfeld

$$K(x,y,z) := \left(\frac{2(zx+y)}{x^2+y^2}, \frac{2(zy-x)}{x^2+y^2}, \log(x^2+y^2) \right)^T,$$

sowie die beiden Kurven

$$\gamma_1 : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ \gamma_1(\varphi) := (\cos\varphi, \sin\varphi, 0),$$
$$\gamma_2 : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ \gamma_2(\varphi) := (2\cos\varphi, 2\sin\varphi, 2).$$

Berechnen Sie die Grösse

$$\int_{\gamma_1} K \cdot \overrightarrow{ds} - \int_{\gamma_2} K \cdot \overrightarrow{ds}$$

mit Hilfe des Satzes von Stokes.

3. Es sei $H \subset \mathbb{R}^3$ das hyperbolische Paraboloid $\{(x,y,z) : z = x^2 - y^2\}$ und $S \subset H$ die Teilmenge $\{(x,y,z) \in H : x^2 + y^2 < 1\}$. Man verifiziere den Satz von Stokes für das Vektorfeld

$$F(x,y,z) = (z,x,y)^T.$$

4. Gegeben seien $S \subset \mathbb{R}^3$ als Oberfläche des durch die Ungleichungen

$$0 \le z \le 1 - x^2 - y^2$$

definierten Körpers und das Vektorfeld $K(x,y,z) := (x,y,z^2)^T$. Berechnen Sie den Fluss von K durch S

a) direkt als Flussintegral,

b) mit Hilfe des Satzes von Gauss.

5. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$K : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad K(x, y, z) := (0, 0, 1 - z)^T,$$

von unten nach oben durch die obere Hälfte der Einheitssphäre

$$H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}$$

a) als Flussintegral $\int_H K \cdot n \, do$,

b) mit Hilfe des Satzes von Gauss. (*Hinweis:* Finden Sie ein dreidimensionales Gebiet Ω, dessen Rand H enthält, sodass der Fluss durch $\partial\Omega \setminus H$ verschwindet.)

6. Ein Heissluftballon habe die Form einer Sphärenkappe vom Radius R und Öffnungsdurchmesser $d < 2R$ gemäss Figur. Das heisse Gas dringt durch die poröse Oberfläche B mit der Geschwindigkeit

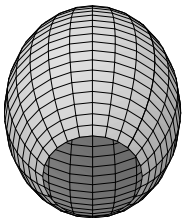
$$\mathbf{v} = \mathbf{rot}\,\mathbf{F}, \quad \text{wobei} \quad \mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Man berechne den Fluss $\int\limits_B \mathbf{v} \cdot n do$ durch die Ballonoberfläche B

a) direkt,

b) mittels des Satzes von Stokes,

c) mit Hilfe des Satzes von Gauss.



Abgabe: keine.