Lösung Serie 1

---

1. a) Die Matrix A hat Jordan-Normalform, d.h. $A = D + N$ mit

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit $ND = DN$ und $N^2 = 0$ erhalten wir die Fundamentallösung

$$\Phi(t) = e^{At} = e^{(D+N)t} = e^{Dt}e^{Nt} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{aligned}
\int_0^t \exp((t-s)A)f(s)\,ds &= \exp(tA)\int_0^t \exp(-sA)f(s)\,ds \\
&= \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-2s} & -se^{-2s} \\ 0 & e^{-2s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} se^{2s} \\ e^{2s} \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} t^2e^{2t} \\ te^{2t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2. a) Gesucht ist e^{At}. A ist schon eine Jordan Matrix:

$A = D + N$ wobei $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $DN = ND$ und $N^2 = 0$.

Bemerkung: Die Binomialformel $(D+N)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} D^i N^{k-i}$ gilt nur wenn $ND = DN$ (Verifiziere!)

$$\Rightarrow e^{D+N} = \sum_{k\geq 0} \frac{(D+N)^k}{k!} = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} D^i N^{k-i} = \sum_{k\geq 0} \sum_{\substack{i,j\geq 0 \\ i+j=k}} \frac{D^i N^j}{i!j!} = e^D e^N.$$

$\Rightarrow e^{tA} = e^{t(D+N)} = e^{tD}e^{tN}$, mit $e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ und $e^{tN} = \mathbb{1} + tN$.

$\Rightarrow e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} =: \Phi(t)$ mit $\Phi(0) = \mathbb{1}$.

b) Die Lösung $u(t)$ ist gegeben durch:

$$u(t) = \Phi(t)u_0 + \int_0^t \Phi(t-s)b(s)\mathrm{d}s$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-t+s} & (t-s)e^{-t+s} \\ 0 & e^{-t+s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ e^{-s} \end{pmatrix} \mathrm{d}s$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-t} \int_0^t \begin{pmatrix} se^s + (t-s) \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}s$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} (t-1)e^t + t^2 - \frac{t^2}{2} + 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - 1 + (\frac{t^2}{2} + 2)e^{-t} \\ te^{-t} \end{pmatrix}.$$

3. a)

$$L(xy) = \int_1^{xy} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_x^{xy} \frac{\mathrm{d}t}{t} = L(x) + \int_1^y \frac{\mathrm{d}s}{s} = L(x) + L(y),$$

wobei $s = \frac{t}{x}$ substituiert wurde.

Da $\frac{1}{x} \in C^0(\mathbb{R}_+)$ gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung $\frac{\mathrm{d}L(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$, also ist $L'(1) = 1$.

b) Da $L'(x) > 0 \forall x \in]0, \infty[$ folgt, dass L streng monoton wächst. Desweiteren ist $L''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \forall x \in]0, \infty[$, also ist L konkav.

4. $I_{n,0} = \int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} = \frac{n!0!}{(n+0+1)!}$, $I_{0,m} = \int_0^1 (1-x)^m \mathrm{d}x = -\frac{1}{m+1} = \frac{0!m!}{(0+m+1)!}$

Seien nun $n, m \geq 1$: $I_{n,m} = \int_0^1 x^n (1-x)^m \mathrm{d}x = \underbrace{-x^n \frac{(1-x)^{m+1}}{m+1}|_0^1}_{=0} + \int_0^1 nx^{n-1} \frac{(1-x)^{m+1}}{m+1} \mathrm{d}x =$

$\frac{n}{m+1} I_{n-1,m+1} = \frac{n}{m+1} \frac{n-1}{m+2} I_{n-2,m+2} = \ldots = \frac{n}{m+1} \frac{n-1}{m+2} I_{n-2,m+2} \cdots \frac{1}{m+n} I_{0,m+n}$

$= \frac{n!}{(m+1)\cdots(m+n)} \frac{1}{m+n+1} = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}$.

5. a) Substitution $y = \cos x$ und anschliessende partielle Integration ergibt

$$e^{-\cos x} \left(56 + 50\cos x + 12\cos(2x) + 2\cos(3x)\right) .$$

b) Substitution $u = (1+x)^{1/2}$ ergibt

$$x - 2(1+x)^{1/2} + 2\log\left(1 + (1+x)^{1/2}\right) .$$

c) Wir schreiben

$$\int \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2} \mathrm{d}x = \int \arctan x \mathrm{d}x - \int \frac{\arctan x}{1+x^2} \mathrm{d}x$$

und bestimmen beide Integrale mittels partieller Integration. Das Resultat ist

$$x \arctan x - \frac{1}{2} \arctan(x)^2 - \frac{1}{2} \log\left(1+x^2\right) \ .$$

d) Partialbruchzerlegung ergibt

$$\frac{2+x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \arctan x + \log x \ .$$

6. Lösen Sie folgendes unbestimmte Integral:

$$\int \frac{\ln(x)}{x^2} \, dx$$

√ ◯ $-\frac{\ln(x)+1}{x} + C$

◯ $-\frac{\ln(x)-1}{x} + C$

◯ $-\frac{\ln(x)}{x} + \ln(x) + C$

Man prüft nach, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{\ln(x)+1}{x} + C\right) = \frac{\ln(x)}{x^2}$.