Lösung Serie 2

---

1. a) $x^3 + x^2 - x - 1 = (x-1)(x+1)^2$

Mit Partialbruchzerlegung

$\frac{x}{x^3+x^2-x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1} = \frac{A(x+1)^2+B(x-1)+C(x^2-1)}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{x^2(A+C)+x(B+2A)+A-B-C}{(x-1)(x+1)^2}$

erhalten wir die Gleichungen

$A + C = 0, B + 2A = 1, A - B - C = 0$, also $A = 1/4, B = 1/2, C = -1/4$.

$\Rightarrow \int \frac{x\mathrm{d}x}{x^3+x^2-x-1} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2} - \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{4}\ln|x+1| + c = \frac{1}{4}\ln|\frac{x-1}{x+1}| - \frac{1}{2(x+1)} + c.$

b) Da i eine Nullstelle des Nenners ist, ist auch $-i$ eine, also teilt x^2+1 den Nenner. $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2 = (x^2+1)(x^2+2x+2)$ Mit PBZ:

$\frac{2x^3+5x^2+4x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2} = \frac{(Ax+B)(x^2+2x+2)+(Cx+D)(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+2x+2)} = \frac{x^3(A+C)+x^2(2A+B+D)+x(2A+2B+C)}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}$

erhalten wir die Gleichungen $A+C = 2, 2A+B+D = 5, 2A+2B+C = 4, 2B+D = 1$ mit der Lösung $A = 2, B = C = 0, D = 1$.

$\Rightarrow \int \frac{2x^3+5x^2+4x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2}\mathrm{d}x = \int \frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} = \ln(x^2+1) + \arctan(x+1) + c.$

2. a) Man forme um und integriere partiell:

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{-x^2+x^2+1}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{-x^2}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int -x\frac{x}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x + I_{n-1} \\
&= \frac{1}{2(n-1)}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} - \int \frac{1}{2(n-1)}\frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\,\mathrm{d}x + I_{n-1} \\
&= \frac{1}{2(n-1)}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}
\end{aligned}$$

b) Partialbruchzerlegung ergibt

$$\int \frac{x^6+3x^4+4x^2-x+1}{x^7+3x^5+3x^3+x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x} + \frac{x-1}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x = \ln x - \frac{1}{4}\frac{1}{(x^2+1)^2} - I_3$$

Mit der Rekursion aus (a) haben wir $I_1 = \arctan x$, $I_2 = \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\arctan x$ und $I_3 = \frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{3}{4}\frac{1}{2}\arctan x$. Insgesamt ergibt das:

$$\int \frac{x^6+3x^4+4x^2-x+1}{x^7+3x^5+3x^3+x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x} + \frac{x-1}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x = \ln x - \frac{1}{4}\frac{x+1}{(x^2+1)^2} - \frac{3}{8}\frac{x}{x^2+1} - \frac{3}{8}\arctan x$$

3. a)

$$s_n := \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(f(\tfrac{1}{n}) + f(\tfrac{2}{n}) + \ldots + f(\tfrac{n}{n})\right) \quad (*)$$

wobei $f(x) := \frac{1}{1+x}$ stetig auf $]-1,\infty[$ ist. Da $(*)$ eine Riemannsumme ist, folgt $\lim_{n\to\infty} s_n = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = [\ln|1+t|]_0^1 = \ln 2$.

b) Analog: $s_n := \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2} \to \underbrace{\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t}_{=\arctan t|_0^1 = \frac{\pi}{4}.}$ $(n \to \infty)$, wobei $g(x) := \frac{1}{1+x^2}$.

4. Ein Beispiel einer solchen Funktionenfolge ist

$$f_k(x) := \max\{0, \min\{4k^2x,\ 4k - 4k^2x\}\},$$

denn es gilt $f_k(0) = 0$ für alle k und für beliebiges $0 < x \leq 1$ gilt $k \geq \frac{1}{x} \Rightarrow f_k(x) = 0$. Somit gilt für alle $x \in [0,1]$: $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0$. Andererseits gilt für alle k: $\int_0^1 f_k(x)\mathrm{d}x = 1$.

5. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \text{ rational ist,} \\ 1 & \text{falls } x \text{ irrational ist.} \end{cases}$$

Ist f Riemann-integrierbar oder nicht? Und was ist die richtige Begründung? Die Funktion f ist ...

○ integrierbar, weil sie beschränkt ist.

○ nicht integrierbar, weil sie unstetig ist.

○ integrierbar, weil die Stellen mit $f(x) = 0$ vernachlässigbar sind und sie ansonsten mit einer konstanten Funktion übereinstimmt.

√ ○ nicht integrierbar, weil sie in jedem Teilintervall von $[0, 1]$ beide Werte 0 und 1 annimmt und daher die Riemann-Summen nicht konvergieren.

Die Funktion ist nicht integrierbar, und die richtige Begründung ist die in (d): Für jede Zerlegung von $[0, 1]$ hängt die entsprechende Riemann-Summe für f von der Wahl der Stützstellen ξ_i ab. Z.B. kann man sie so wählen, dass $f(\xi_i) = 0$ oder aber $f(\xi_i) = 1$ für alle i gilt, und die entsprechenden Riemann-Summen haben dann den Wert 0 bzw. 1. Das widerspricht der Definition der Riemann-Integrierbarkeit.

Insbesondere liefert f ein Beispiel für eine auf einem kompakten Intervall definierte und beschränkte Funktion, die nicht Riemann-integrierbar ist. Der Schluss in (a) ist also falsch. Genauso ist der in (c) falsch, wie ebenfalls die obige Argumentation zeigt.

Auch die Begründung in (b) ist falsch. Ein Beispiel für eine unstetige aber dennoch Riemann-integrierbare Funktion liefert die Vorzeichenfunktion $\operatorname{sgn} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$.