Lösung Serie 6

---

1. **a)** Mit $r = \sqrt{x^2+y^2}$ bekommen wir

$$\partial_r f(0,0) = \lim_{r\to 0} r \sin\frac{1}{r} = 0,$$

also ist f auf ganz $\mathbb{R}^2$ differenzierbar.

b) Die partiellen Ableitungen

$$\partial_x f(x,y) = 2x\sin\frac{1}{r} - \frac{x}{r}\cos\frac{1}{r} \quad \text{und} \quad \partial_y f(x,y) = 2y\sin\frac{1}{r} - \frac{y}{r}\cos\frac{1}{r}$$

besitzen keinen Grenzwert für $x, y \to 0$, womit sie nicht stetig in $(0,0)$ sind.

2.

$$g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto (g_1(x,y), g_2(x,y))$$
$$\Phi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto f(g(x,y)) = \log(x^2y^2 + \frac{x}{y^2})$$

Direkt:

$$\mathrm{d}\Phi(x,y) = \frac{1}{x^2y^2 + \frac{x}{y^2}}(2xy^2 + \tfrac{1}{y^2})\mathrm{d}x + \frac{1}{x^2y^2 + \frac{x}{y^2}}(2x^2y - 2\tfrac{x}{y^3})\mathrm{d}y$$

Kettenregel:

$$\mathrm{d}\varphi(x,y) = \mathrm{d}f(g(x,y))\mathrm{d}g(x,y)$$
$$\mathrm{d}f(u,v) = \frac{2u}{u^2+v^2}\mathrm{d}u + \frac{2v}{u^2+v^2}\mathrm{d}v$$
$$\mathrm{d}g(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{2\sqrt{x}y} & \frac{-\sqrt{x}}{y^2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}\Phi(x,y) = \left(\frac{2xy}{x^2y^2 + \frac{x}{y^2}}, \frac{2\frac{\sqrt{x}}{y}}{x^2y^2 + \frac{x}{y^2}}\right)\begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{2\sqrt{x}y} & \frac{-\sqrt{x}}{y^2} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{x^2y^2 + \frac{x}{y^2}}\left(2xy^2 + \tfrac{1}{y^2}, 2x^2y - 2\tfrac{x}{y^3}\right).$$

3. Die Differenzierbarkeit folgt aus der Cramer'schen Regel (Einträge von $A(t)^{-1}$ sind rationale Funktionen in den Einträgen von $A(t)$ mit Nennerpolynom $\det(A)$), und die angegebene Formel ergibt sich aus

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A^{-1}A) = \frac{\mathrm{d}(A^{-1})}{\mathrm{d}t}A + A^{-1}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}.$$

4. **a)** $\lambda(x,y) = (x+y)\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}y$ auf $\mathbb{R}^2$. Wir versuchen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zu finden, so dass $\mathrm{d}f = \lambda$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x+y \Rightarrow f(x,y) = \tfrac{1}{2}x^2+xy+g(y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = x+g'(x) = x-y \Rightarrow g(y) = -\tfrac{1}{2}y^2+c$$

Also erfüllt $f(x,y) := \frac{1}{2}(x^2-y^2)+xy$ die gesuchte Bedingung.

$$\Rightarrow \int_\gamma \lambda = f(1,1) - f(-1,1) = 2.$$

Bemerkung: Eine solche Funktion f existiert nicht in b) und c).

b) $\lambda(x,y) = xy^2\mathrm{d}y$ auf $\mathbb{R}^2$. Die Ellipse wird parametrisiert durch

$$\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\cos t, 2\sin t).$$

$\Rightarrow \int_\gamma \lambda = \int_0^{2\pi} \lambda(\gamma(t))\dot\gamma(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}(0, 4\sin^2 t\cos t)\begin{pmatrix} -\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}\mathrm{d}t = 8\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t =$
$2\int_0^{2\pi}\sin^2(2t)\mathrm{d}t = t - \frac{1}{4}\sin(4t)|_{t=0}^{t=2\pi} = 2\pi.$

c) $\lambda(x,y) = (x^2+y^2)\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\mathrm{d}y$ auf $\mathbb{R}^2$.

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (0 \le t \le 1)$$

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix}, \quad (0 \le t \le 1)$$

$$\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \end{pmatrix}, \quad (0 \le t \le 1)$$

$\int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}\lambda$
$= \int_0^1 (t^2,t^2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \big((1-t)^2+t^2, (1-t)^2-t^2\big)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \big((1-t)^2, -(1-t)^2\big)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\mathrm{d}t$
$= \int_0^1(1-2t)\mathrm{d}t = 0.$

5. $(J\dot\gamma,\gamma) = \binom{-\dot y}{\dot x}\cdot\binom{x}{y} = -x\dot y + \dot x y$

Mittels partieller Integration folgt $\frac{1}{2}\int_0^1(J\dot\gamma,\gamma)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 -x(t)\dot y(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 \dot x(t)y(t)\mathrm{d}t\right) =$
$\frac{1}{2}(\underbrace{-x(t)y(t)|_{t=0}^1}_{\substack{=x(0)y(0)-x(1)y(1)=0 \\ \text{da } \gamma(0)=\gamma(1)}} + \int_0^1 \dot x(t)y(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 \dot x(t)y(t)\mathrm{d}t) = \int_0^1 \dot x(t)y(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 (y(t),0)\binom{\dot x(t)}{\dot y(t)}\mathrm{d}t =$
$\int_\gamma y\mathrm{d}x = A(\gamma).$

6. Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- ◯ Wenn f differenzierbar ist, dann ist f stetig partiell differenzierbar.
- √ ◯ Wenn f stetig partiell differenzierbar ist, dann ist f differenzierbar und stetig.
- ◯ Wenn alle partiellen Ableitungen existieren, dann ist f stetig.
- ◯ Wenn alle partiellen Ableitungen existieren, dann ist f differenzierbar.

Vgl. Sätze aus der Vorlesung.