Lösung Serie 7

---

1. Suche f so, dass $\nabla f = v$.

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2xy^3 \implies f(x,y,z) = x^2y^3 + g(y,z) \implies \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^3 + \frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = 3x^2y^2 + 2xy \implies g(y,z) = y^2z + h(z) \implies \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = y^2 + h'(z) = y^2 \implies h(z) = c \implies f(x,y,z) = x^2y^3 + y^2z$

$\implies \int_\gamma v \cdot \mathrm{d}\vec{s} = f(1,2,1) - f(0,0,0) = 12.$

b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = x(y^2+z^2) + 1 \implies f(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2(y^2+z^2) + g(y,z) + x \implies \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x^2y + \frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = x^2y + yz^2 \implies g(y,z) = \frac{1}{2}y^2z^2 + h(z) \implies \frac{\partial f}{\partial z} = x^2z + y^2z + h'(z) = x^2z + y^2z - 1 \implies h(z) = -z + c \implies f(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) - z + x$

$\implies \int_\gamma v \cdot \mathrm{d}\vec{s} = f(1,2,1) - f(0,0,0) = \frac{9}{2}.$

c) v ist nicht konservativ.

$\int_\gamma v \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_0^1 v(\gamma(t)) \cot \dot{\gamma}(t) \mathrm{d}t = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^3+t \\ t^3+t^2+2t \\ t^3+t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t+1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_0^1 3t^5 + 2t^4 + 7t^3 + 5t^2 + 3t \mathrm{d}t = \frac{349}{60}.$

2. Die Abbildung $p : \Omega \to \Omega$ ist C^1. Sie ist bei $A_i \in \Omega$ lokal C^1-Diffeomorphismus genau dann wenn $\mathrm{d}p(A_i)$ invertierbar ist. Notation: $\Xi \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

a) $\mathrm{d}p(A) \cdot \Xi = \sum_{i=1}^k A^{i-1}\Xi A^{k-i}$. Dann ist $\mathrm{d}p(A_1) = \mathrm{d}p(\mathbf{0}) = 0$ nicht invertierbar aber $\mathrm{d}p(A_2) = \mathrm{d}p(\mathbf{1}) = k\,\mathrm{id.}$ ist invertierbar.

b) $\mathrm{d}p(A) \cdot \Xi = \Xi A + A\Xi$, mit $\Xi = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ ist $\mathrm{d}p(A_1) \cdot \Xi = \left(\begin{smallmatrix} 2a & 0 \\ 0 & -2d \end{smallmatrix}\right)$, d.h. $\mathrm{d}p(A_1)$ nicht invertierbar.

c)

$$\mathrm{d}p(A) \cdot \Xi = \Xi e^{-A} + (1+A)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} e^{-A-s\Xi}.$$

(Vorsicht: für Matrizen A und B muss **nicht** $e^A e^B = e^{A+B}$ gelten.) Es ist $\mathrm{d}p(A_1) = 0$ nicht invertierbar aber $\mathrm{d}p(A_2) = -e^{-1}\,\mathrm{id.}$ invertierbar.

3. Sei $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ gegben mit

$$g(x, y, \xi, \eta) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{xy} \sin(x^2 - y^2 + x) - \xi \\ \mathrm{e}^{x^2+y} \cos(x^2 + y^2) - 1 - \eta \end{pmatrix}$$

Es gilt: $g(0,0,0,0) = \binom{0}{0}$. $\mathrm{d}g(0,0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ hat Rang 2 (also maximal).

$\partial_{(x,y)} g(0,0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist invertierbar.

Aus dem impliziten Funktionentheorem folgt: $\exists$ Umgebung U, V von $0 \in \mathbb{R}^2$ und $h \in C^1(U, V)$ so, dass $g(x, y, \xi, \eta) = 0 \quad \forall (\xi, \eta) \in U, (x, y) \in V$ äquivalent ist mit $x = h^1(\xi, \eta), y = h^2(\xi, \eta), (\xi, \eta) \in U, (x, y) \in V$.

Wähle $\varepsilon > 0$ klein, so dass $B_{\sqrt{\varepsilon}}(0,0) \subset U$.

4. **a)** $g(0,0) = 0$ und $\partial_y g(x, y) = 1 + x^2 + 3y^2 > 0 \forall x, y$ (insbesondere $\partial_y g(0,0) > 0$). Aus dem impliziten Funktionentheorem folgt, dass Umgebungen U von $0 \in \mathbb{R}$ und W von $0 \in \mathbb{R}^2$ existieren, so dass

$$g^{-1}\{0\} \cap W = \{(x, h(x)) | x \in U\}$$

für eine $C^1(U)$-Funktion h. D.h. lokal um 0 lassen sich die Lösungen von $g(x, y) = 0$ als Graph schreiben.

b) Für $x \in U$ gilt $g(x, h(x)) = 0$ und deshalb $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x, h(x)) = 0$. Also $\frac{\partial g}{\partial x}(x, h(x)) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, h(x)) h'(x) = 0$

$$\implies h'(x) = \frac{-\frac{\partial g}{\partial x}(x, h(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, h(x))} = \frac{-(1 + 2xh(x))}{1 + x^2 + 3h(x)^2}, \quad \text{insbesondere: } h'(0) = -1$$

c) Folglich löst $h(t), t \geq 0$ das folgende AWP Problem in einer Umgebung von $t = 0$:

$$u' = f(t, u) := \frac{-1 - 2tu}{1 + t^2 + 3u^2}, \qquad u(0) = 0$$

$uf(t, u) \leq \frac{-u}{1+t^2+3u^2} \leq |u| \leq 1 + |u|^2$. Aus dem Satz VII.3.4.2 (Fortseztbarkeit von Lösungen) folgt $h(t)$ lässt sich auf $t \in [0, \infty[$ fortsetzen. $\implies$ (siehe b) rückwärts) $g(x, h(x)) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$. (*)

Bem.: Eigentlich haben wir $h(x)$ nur auf $[0, \infty[$ erweitert. Da aber $g(x, y) = -g(-x, -y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ können wir $h(-x) := -h(x) \quad \forall x \geq 0$ definieren, so dass $g(x, h(x)) = 0$ auf ganz $\mathbb{R}$ folgt.

d) Aus (*) folgt direkt: $g^{-1}(0) = \{(x, h(x)) | x \in \mathbb{R}\}$.

5.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \frac{x}{1+x^2+y^2}.$$

$$\begin{aligned} df(x,y) &= \left(\frac{1-x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^2}, \frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2}\right) = (0,0) \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1-x^2+y^2 = 0 \quad \text{und} \\ 2xy = 0 \end{array} \right\} \\ &\Leftrightarrow \quad x = \pm 1 \quad \text{und} \quad y = 0. \end{aligned}$$

Hesse-Matrix

$$H_f(x,y) = \frac{1}{u^4} \begin{pmatrix} -2xu^2 - (1-x^2+y^2)\cdot 2u \cdot 2x & -2yu^2 + 2xy \cdot 2u \cdot 2x \\ -2yu^2 + 2xy \cdot 2u \cdot 2x & -2xu^2 + 2xy \cdot 2u \cdot 2y \end{pmatrix},$$

wobei $u := 1 + x^2 + y^2$.
$\Rightarrow H_f(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} \mp\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \mp\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
$\Rightarrow (1,0)$ ist ein lokales Maximum, $(-1,0)$ lokales Minimum.

6. **a)** Nebenbedingung: $g(x,y) = 0$, wobei $g(x,y) := x^2 + x^2 - 1$. Lagrange-Gleichungen:

$$2x - 1 = \lambda \cdot 2x, 4y = \lambda \cdot 2y \text{ und } x^2 + y^2 = 1.$$

Fall 1: $y = 0 \implies x = \pm 1$

Fall 2: $y \neq 0 \implies \lambda = 2 \implies x = -1/2 \implies y = \pm\sqrt{3}/2$

$f(-1/2, \pm\sqrt{3}/2) = 9/4$ ist das Maximum und $f(1,0) = 0$ das Minimum ($f(-1,2) = 2$).

b) Für ein Extremum auf $\{(x,y) | x^2 + y^2 < 1\}$ ist es notwendig, dass $\mathrm{d}f(x,y) = (2x-1, 4y) = (0,0) \implies (1/2, 0)$ ist ein weiterer Kandidat. $f(1/2,0) = -1/4$ ist also das Minimum (Maximum wie bei a)).

7. Kandidaten für Extrema sind gegeben durch Punkte (x,y,z) mit $\mathrm{Rang}\binom{\mathrm{d}g_1(x,y,z)}{\mathrm{d}g_2(x,y,z)} < 2$ und die Punkte (x,y,z) mit $\mathrm{Rang}\binom{\mathrm{d}g_1(x,y,z)}{\mathrm{d}g_2(x,y,z)} = 2$, die Lösungen der Lagrange-Gleichungen sind.

$\mathrm{d}g_1(x,y,z) = (2x, 2y, 2z), \mathrm{d}g_2(x,y,z) = (4x, 2y, 0)$ sind genau im Punkt $P_\pm := (0, \pm 1, 0)$ kolinear.

Lagrange-Gleichungen:

$$\begin{aligned} 3x^2 &= \lambda \cdot 2x + \mu \cdot 4x && (1) \\ 1 &= \lambda \cdot 2y + \mu \cdot 2y && (2) \\ 3z^2 &= \lambda \cdot 2z && (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 && (4) \\ 2x^2 + y^2 &= 1 && (5) \end{aligned}$$

Fall 1: $z = 0$. (4),(5) $\implies x = 0$ und $y = \pm 1$. Es sind die Punkte $P_\pm$.

Fall 2: $z \neq 0$.

- $x = 0$. (5) $\implies y = \pm 1$ und (4) $\implies z = 0$. Widerspruch zu $z \neq 0$.
- $y = 0$ ist unmöglich wegen (2).

Seien also $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$. (1),(2) $\implies \lambda = \frac{2-3xy}{2y}$ und $\mu = \frac{3xy-1}{2y}$. Einsetzen von $z = 2/3\lambda$ (aus (3)) in (4),(5) ergibt: $x^2 + y^2 + \left(\frac{2-3xy}{3y}\right)^2 = 1, 2x^2 + y^2 = 1 \implies x^2 = \left(\frac{2-3xy}{3y}\right)^2 \implies x = \pm\frac{2-3xy}{3y} \implies y = \frac{1}{3x}$. Einsetzen in (5): $2x^2 + \frac{1}{9x^2} = 1 \implies 18x^4 - 9x^2 + 1 = (3x^2 - 1)(6x^2 - 1) = 0$. Entweder:

- $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \implies y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \implies z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ (aus $\lambda = \pm\sqrt{3}/2$). D.h. $Q_\pm = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$
  oder:
- $x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}} \implies y = \pm\frac{2}{\sqrt{3}} \implies z = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ (aus $\lambda = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3/2}$). D.h. $R_\pm = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)$.

$f(P_\pm) = \pm 1, f(Q_\pm) = \pm\frac{5}{3\sqrt{3}}, f(R_\pm) = \pm\frac{7\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}$. Also ist P_+ das Max. und P_- das Min.

8. Untersuchen Sie die Aussagen: Die Jacobi-Determinante der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\} \to \mathbb{R}^2$, $\binom{x}{y} \mapsto \binom{x^2-y^2}{2xy}$ ist gleich $4(x^2+y^2)$ und somit strikt positiv; folglich ist f invertierbar.

○ Alle diese Aussagen sind korrekt.

○ Die Funktionaldeterminante hat einen anderen Wert.

○ Die Funktionaldeterminante ist nicht überall positiv.

√ ○ Die Funktion f ist nur *lokal* umkehrbar.

Die Funktion f ist stetig differenzierbar und ihre Jacobi-Matrix ist $\nabla f = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$. Deren Determinante ist gleich $4(x^2 + y^2)$ und somit strikt positiv für alle $\binom{x}{y} \neq \binom{0}{0}$. Nach dem Satz über inverse Funktionen ist f also überall lokal invertierbar. Global aber nicht, denn wegen $f\binom{x}{y} = f\binom{-x}{-y}$ ist f nicht injektiv. Die richtige Antwort lautet daher (d).