Lösung Serie 9

---

1. **a)** $$\int_0^{\pi/2}\int_0^1 y\sin(xy)\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2} -\cos(xy)\Big|_0^1 dy = \int_0^{\pi/2}(1-\cos y)\,dy$$

$$= y - \sin(y)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1$$

b) $$\int_0^1 x^2\,dx \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2}\int_0^1 z^3\,dz = \frac{1}{3}\arctan(1)\frac{1}{4} = \frac{\pi}{48}$$

c) $$\int_1^2\int_2^3 \frac{dx\,dy}{(x+y)^2}\int_0^2 2z\,dz = z^2\Big|_0^2 \cdot \int_2^3 -\frac{dx}{x+y}\Big|_1^3$$

$$= 4(\log|x+2| - \log|x+3|)\Big|_1^3 = 4\log\frac{16}{15}$$

d) $$\int_0^\pi\int_0^\pi\int_0^\pi \sin(x+y+z)\,dz\,dy\,dx = 2\int_0^\pi\int_0^\pi \cos(x+y)\,dy\,dx$$

$$= -4\int_0^\pi \sin(x)\,dx = -8,$$

wobei $\cos(x+y+\pi) = -\cos(x+y)$ und $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$ verwendet wurde.

e) $$\int_0^1\int_0^1 \frac{y\,dy\,dx}{\sqrt{4-x^2y^2}} = \int_0^1 -\frac{\sqrt{4-x^2y^2}}{x^2}\Big|_0^1 dx = \int_0^1 \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x^2}(2-\sqrt{4-x^2y^2})\,dx \overset{P.I.}{=} -\frac{1}{x}(2-\sqrt{4-x^2y^2})\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$= \sqrt{3} - 2 + \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_0^1 = \sqrt{3} - 2 + \frac{\pi}{6}$$

2. **a)** Zuerst zeigen wir den folgenden Hilfssatz:
Sei $f_{n,k}(x_1,\ldots,x_k) := \frac{1}{(n-k)!}\left(1-\sum_{i=1}^k x_i\right)^{n-k}$, dann gilt

$$\int_0^{1-\sum_{i=1}^{k-1} x_i} f_{n,k}(x_1,\ldots,x_k)\,dx_k = f_{n,k-1}(x_1,\ldots,x_{k-1})\,.$$

Man beweist diese Aussage mit einer direkten Rechnung:

$$\int_0^{1-\sum_{i=1}^{k-1} x_i} \left(1-\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^{n-k} dx_k = \frac{-1}{n-k+1}\left(1-\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^{n-k+1}\Bigg|_{x_k=0}^{1-\sum_{i=1}^{k-1} x_i}$$

$$= \frac{-1}{n-(k-1)}\left[0-\left(1-\sum_{i=1}^{k-1} x_i\right)^{n-k+1}\right] = (n-k)!f_{n,k-1}(x_1,\ldots,x_{k-1})\,.$$

Der Rest ist nun einfach:

$$\begin{aligned}
\mu(\Sigma_n) &= \int_0^1\int_0^{1-x_1}\cdots\int_0^{1-\sum_{i=0}^{n-1} x_i} dx_n\ldots dx_2\,dx_1\\
&= \int_0^1\int_0^{1-x_1}\cdots\int_0^{1-\sum_{i=0}^{n-2} x_i} f_{n,n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})\,dx_{n-1}\cdots dx_2\,dx_1\\
&= \int_0^1\int_0^{1-x_1}\cdots\int_0^{1-\sum_{i=0}^{n-3} x_i} f_{n,n-2}(x_1,\ldots,x_{n-2})\,dx_{n-2}\cdots dx_2\,dx_1\\
&= \cdots = \int_0^1 f_{n,1}(x_1)\,dx_1 = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 (1-x_1)^{n-1}dx_1 = \frac{1}{n!}
\end{aligned}$$

Bemerkung: Alternativ kann die Aufgabe mit dem Prinzip von Cavalieri (=Integration über die "Querschnittsflächen", ist nicht in der Vorlesung gekommen) gelöst werden. Aus

$$\mu(\Sigma_n) = \int_0^1 \mu(\Sigma_{n-1})(1-x)^{n-1}dx = \frac{1}{n}\mu(\Sigma_{n-1})$$

und $\Sigma_1 = 1$ folgt sofort $\Sigma_n = \frac{1}{n!}$.

b) Schreibe $S_n := \int_{\Sigma_n} \exp\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) d\mu$. Zum Beispiel ist $S_1 = \int_0^1 e^{x_1}\,dx_1 = e-1$. Es soll nun jeweils gelten, dass $x_i \geq 0, i = 1\ldots n$.

$$\begin{aligned}
S_n &= \int\limits_{0<x_1+\cdots+x_n<1} \exp\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) d\mu = \int\limits_{\substack{0<x_1+\cdots+x_{n-1}<1\\ 0<x_n<1-x_1\cdots-x_{n-1}}} \exp\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right) e^{x_n} dx_n dx_{n-1}\ldots dx_1\\
&= \int\limits_{0<x_1+\cdots+x_{n-1}<1} \exp\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right) e^{x_n}\Bigg|_{x_n=0}^{1-x_1\cdots-x_{n-1}} dx_{n-1}\ldots dx_1\\
&= \int\limits_{0<x_1+\cdots+x_{n-1}<1} \left[e-\exp\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right)\right] dx_{n-1}\ldots dx_1\\
&= \frac{e}{(n-1)!} - S_{n-1}
\end{aligned}$$

Indem man diese Identität iterativ anwendet, erhält man die folgende Summe

$$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}\frac{e}{(n-k)!} + (-1)^n$$

*Bemerkung:*Alternative Lösung mit Variablentransformation:

$$y_k = \sum_{i=1}^k x_i, \quad 1 \le k \le n, \quad \text{und} \quad A_n = \{y \in [0,1]^n \mid y_i \le y_j \ \forall\, i < j\}$$

gilt

$$\int_{\Sigma_n} e^{\sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n dx_i = \int_{A_n} e^{y_n} \prod_{i=1}^n dy_i = \int_0^1 \frac{y^{n-1}e^y}{(n-1)!} dy = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(-1)^{n-1-k}}{k!}\, e + (-1)^n.$$

3. Wir approximieren das Volumen Ω durch "schmale" Zylinder. Dazu betrachten wir eine Partition des Intervalles $a = a_0, a_1, \ldots, a_n = b$ und wählen Punkte $x_k \in [a_{k-1}, a_k]$. Dann ist das Volumen von Ω näherungsweise gleich der Summe $S_n := \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1})\pi f(x_k)^2$. Dies ist gerade eine Riemannsumme für die Funktion $g(x) = \pi f(x)^2$, die gemäss Voraussetzung stetig ist. Daher wissen wir, dass diese Riemannsumme im Limes $n \to \infty$ gegen das Riemannintegral $\pi \int_a^b f(x)^2\, dx$ konvergiert. Weiter wissen wir, dass die Differenz zwischen Unter- und Obersumme in diesem Limes gegen 0 konvergiert, d.h. das innere und das äussere Mass von Ω sind identisch, und somit ist Ω J-messbar mit dem Volumen

$$\mu(\Omega) = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx\,.$$

4.

$$\begin{aligned}
\mu(B) &= \int_{\substack{x^2+y^2<1\\ x,y>0}} \int_{z=0}^{2-x-y} dz\, dy\, dx = \int_{\substack{x^2+y^2<1\\ x,y>0}} (2-x-y) dy\, dx \\
&= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (2-x-y)\, dy\, dx = \int_0^1 \left((2-x)\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}(1-x^2)\right) dx \\
&= 2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx + \frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} - \frac{1}{2}(x - \frac{1}{3}x^3)\Big|_0^1 \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

5. **a)** $\displaystyle\int_{-1}^2 \int_{-x}^{2-x^2} f(x,y)\, dy\, dx = \int_{-2}^2 \int_{-\min\{\sqrt{2-y},y\}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\, dx\, dy$

b) $\displaystyle\int_0^2 \int_{y^3}^{4\sqrt{2y}} f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^8 \int_{\frac{x^2}{32}}^{\sqrt[3]{x}} f(x,y)\, dy\, dx$

c) $\displaystyle\int_{-4}^4 \int_{-\sqrt{4-|z|}}^{\sqrt{4-|z|}} \int_{-\sqrt{4-y^2-|z|}}^{\sqrt{4-y^2-|z|}} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{-(4-x^2-y^2)}^{4-x^2-y^2} f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$

6. Wir bestimmen zunächst die relativen kritischen Punkte von f auf der offenen Menge $\Omega := \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z > \frac{1}{2} \,\}$ unter der Nebenbedingung $g_1(x,y,z) := x^2+y^2+z^2-1 = 0$. g_1 ist überall auf Ω regulär. Wir haben die Lagrange-Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 =& 1 + 2\lambda x \\ 0 =& 1 + 2\lambda y \\ 0 =& 1 + 2\lambda z \end{aligned}$$

Es folgt daraus offenbar $x = y = z$. Unter Verwendung der Nebenbedingung erhalten wir $p_1 := (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ als einzigen kritischen Punkt der Lagrange-Funktion in Ω. Wir notieren $f(p_1) = \sqrt{3}$ (Man sieht ebenfalls sofort, dass die Hessesche Matrix der Lagrange Funktion berall die Diagonalmatrix mit einzigem Eigenwert $2\lambda = -\sqrt{3}$ ist, und somit ein lokales Maximum vorherrscht. Da wir aber ohnehin nach den globalen Extrema suchen, brauchen wir diese Beobachtung nicht). Nun zu den relativen kritischen Punkten auf dem Rand: Wir suchen die kritischen Punkte von f unter den Nebenbedingungen $g_1(x,y,z) = 0$ und $g_2(x,y,z) := z = \frac{1}{2}$. g ist berall regulär ausser auf der z-Achse. Aber kein Punkt auf der z-Achse erfllt beide Nebenbedingungen. Wir erhalten die Lagrange-Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 =& 1 + 2\lambda x \\ 0 =& 1 + 2\lambda y \\ 0 =& 1 + 2\lambda z + \mu \end{aligned}$$

Es folgt $x = y$ und unter Verwendung der Nebenbedingungen erhalten wir die kritischen Punkte $p_2 := (\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2})$ und $p_3 := (-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2})$ und Funktionswerte $f(p_2) = \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} < \sqrt{3}$, $f(p_3) = -\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} < 0$. Somit liegt das globale Maximum in p_1 und das globale Minimum in p_3.

7. Das Integral der Funktion $f(x,y) := \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ über die Menge $B := \big\{(x,y) \,|\, x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\big\}$ ist:

- ○ $\int_B f \, d\mu = \frac{2}{3}\pi$
- √ ○ $\int_B f \, d\mu = \frac{4}{3}\pi$
- ○ $\int_B f \, d\mu = \frac{16}{3}\pi$
- ○ $\int f \, d\mu = 8\pi$
- ○ $\int_B f \, d\mu = \frac{32}{3}\pi$

Die Funktion f ist ≥ 0 auf B, und die Menge der Punkte zwischen ihrem Graphen und der xy-Ebene ist ein Viertel der Halbkugel H mit Zentrum O und Radius 2. Das Integral berechnet daher das Volumen eines Achtels der Vollkugel mit Radius r; dieses beträgt $\frac{4}{3}\pi r^3$; also gilt $\int_B f \, d\mu = \mu(H) = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3}\pi 2^3 = \frac{4}{3}\pi$.

Aliter: Wir rechnen in Polarkoordinaten: $\int_B f\,d\mu = \int_0^2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{4-r^2} \cdot r\,d\phi\,dr = \int_0^2 \sqrt{4-r^2} \cdot r\,dr \cdot \frac{\pi}{2}$. Substitution von $u = \sqrt{4-r^2}$ mit $u\,du = -r\,dr$ liefert $\int_2^0 (-u^2)\,du \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{u^3}{3}\Big|_2^0 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{8}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{3}$.