Serie 9

1. **a)** Für welche $s > 0$ ist

$$\int_a^b \frac{1}{x^s} dx < \infty \,,$$

für $(a, b) = (0, 1), (1, \infty), (0, \infty)$?

b) Die Gammafunktion ist definiert durch

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx \,,$$

für $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$. Zeige, dass Γ überall differenzierbar ist und berechne die Ableitungen als Integrale.

2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine μ-messbare Menge. Die Funktionen $g, g_k \colon \Omega \to \mathbb{R}$ seien μ-integrabel, und es gelte

$$\int_\Omega |g_k - g| \, d\mu \to 0 \quad \text{für } k \to \infty.$$

Weiter seien $f, f_k \colon \Omega \to \mathbb{R}$ μ-messbar mit $|f_k| \leq g_k$ und $f_k \to f$ für $k \to \infty$ punktweise μ-fast überall. Zeige, dass

$$\int_\Omega |f_k - f| \, d\mu \to 0 \quad \text{für } k \to \infty.$$

3. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine μ-messbare Menge und $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine μ-integrable Funktion, wobei μ ein Radonmass auf $\mathbb{R}^n$ sein soll. Es bezeichne $\mathcal{A}$ die σ-Algebra aller μ-messbaren Mengen. Definiere die Mengenfunktion $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ durch

$$A \mapsto \nu(A) := \int_A f \, d\mu \,.$$

a) Zeige, dass die Mengenfunktion ν σ-additiv ist.

b) Es gelte zusätzlich $f \geq 0$ und $\Omega = \mathbb{R}^n$. Zeige, dass die Carathéodory-Erweiterung $\bar{\nu}$ von ν ein Radonmass auf $\mathbb{R}^n$ definiert.

Bitte wenden!

4. Eine Folge messbarer Funktionen $f_k : \Omega \to \mathbb{R}$ auf einer messbaren Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit endlichem Mass konvergiere im Mass, d.h. $f_k \xrightarrow{\mu} f$. Zeige, dass $N(f_k - f) \to 0$, $k \to \infty$, wobei N das Funktional

$$N(g) := \int_\Omega \frac{|g|}{1+|g|} dx$$

ist.

Abgabe: In der Übung vom 2. Mai 2013.

Präsenzübung: Aufgabe 1 wird in der Übung vom 25. April gemeinsam gelöst.