Serie 8

Abgabe: Am Freitag, der 26. April 2013 in den Übungen.

Einsendeschluss für die Online Aufgabe: Freitag, der 26. April , 11.55 Uhr.

1. Bestimme die Eigenwerte und die Haupträume folgender Matrizen/Endomorphismen:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) Für $u, v \in \mathbb{R}^n$ die Matrix $uv^{\mathrm{T}} = (v_1 u | \cdots | v_n u)$.

Hinweis: Es unterscheiden sich die Fälle $\langle u, v \rangle = 0$, und $\neq 0$.

d) Für $a \in \mathbb{R}$,und $P_n(\mathbb{R})$ die Polynome von Grad kleiner n mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$, $f_a \colon P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R}), p \mapsto p_a$. Wobei $p_a(t) = p(t + a)$.

2. In der Vorlesung wurde gezeigt: sei $f \in \mathrm{End}(V)$ so, dass das charakteristische Polynom $\chi_f(t)$ in Linearfaktoren zerfällt, dann ist $f = d + n$ mit $d, n \in \mathrm{End}(f)$ so, dass:

$$\text{(i) } d \text{ diagonalisierbar, (ii) } n \text{ nilpotent, (iii) } dn = nd.$$

Ziel der Aufgabe ist zu beweisen, dass d und n durch f eindeutig bestimmt sind. Sei $f = d + n$ mit (i)-(iii), beweise:

a) Die Haupträume $H_{\lambda_i}(f)$ sind d-invariant: $d(H_{\lambda_i}) \subset H_{\lambda_i}$. Schliesse, dass die Haupträume auch n-invariant sind.

b) Ist $g \in \mathrm{End}(V)$ diagonalisierbar und nilpotent dann ist $g = 0$.

c) Seien $a, b \in \mathrm{End}(V)$ nilpotent mit $ab = ba$, dann ist $a + b$ Nilpotent. Beweise auch, dass $(f - \lambda_i \mathbf{1})$ und n kommutieren.

d) Die Einschränkung von d auf H_{λ_i} ist gleich $\lambda_i \mathbf{1}$.

Hinweis: $d - \lambda_i \mathbf{1} = (f - \lambda_i \mathbf{1}) - n$ und **b)**.

Bitte wenden!

e) d und n (mit den gewünschten Eigenschaften) sind eindeutig durch f bestimmt.

3. Schreibe folgende Matrizen in der Form VDU^* wobei V, U unitär und D diagonal mit positiven Einträgen sind:

a) $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

4. Seien V, W endlichdimensionale $\mathbb{C}$-Vektorräume. Die Singulärwerte von $f : V \to W$ sind definiert als die Quadratwurzeln der strikt positiven Eigenwerte von $f^* \circ f$. Zeige:

Eine strikt positive reelle Zahl σ ist genau dann ein Singulärwert, wenn es Vektoren $v \in V \setminus \{0\}$ und $w \in W \setminus \{0\}$ gibt mit $f(v) = \sigma w$ und $f^*(w) = \sigma v$.

Online-Abgabe. Mehrere Antworten können richtig sein.

Frage 1

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & i-1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, welche Aussagen sind korrekt?

- ◯ A ist diagonalisierbar, mit Eigenwerten $1, i$.
- ◯ A^* ist diagonalisierbar, mit Eigenwerten $1, \bar{i} = -i$.
- ◯ A ist normal.
- ◯ Die Eigenwerte von A^*A sind $1^2, i \cdot \bar{i} = 1$.
- ◯ Die Eigenwerte von A^*A sind $2 \pm \sqrt{3}$.

Siehe nächstes Blatt!

Frage 2

Die Singulärwerte einer invertierbaren normalen Selbstabbildung eines unitären Vektorraums sind:

- ◯ die Eigenwerte.
- ◯ die Quadratwurzeln der Eigenwerte.
- ◯ die Quadrate der Eigenwerte.
- ◯ die Beträge der Eigenwerte.

Frage 3

Für folgende U, V, D ist $A = VDU^*$ eine Singulärwertzerlegung der allgemeinen *unitären* Matrix $A \in U(n)$:

- ◯ $U = A^*$, $V = I_n$, $D = I_n$.
- ◯ $U = I_n$, $V = A$, $D = I_n$.
- ◯ $U = I_n$, $V = I_n$, $D = A$.
- ◯ $U = S$, $V = S^*$, $D = \mathrm{diag}(e^{i\varphi_1}, ..., e^{i\varphi_n})$ wobei $A = SDS^*$ nach dem Spektralsatz.

Frage 4

Sei λ ein Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit μ von $f \in \mathrm{End}(V)$, $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda\mathbf{1}), H_\lambda(f) = \mathrm{Ker}((f - \lambda\mathbf{1})^\mu)$ der zugehörige Eigen- bzw Hauptraum. Im Allgemeinen gilt:

- ◯ $E_\lambda \subset H_\lambda$.
- ◯ $H_\lambda \subset E_\lambda$.
- ◯ $E_\lambda = H_\lambda \iff \mu = 1$.