ETH Zürich FS 2013
D-MATH
Hans Rudolf Künsch

Koordinator
Blanka Horvath

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Serie 5

1. Für $s \in (1, \infty)$ ist die **Riemann'sche Zetafunktion** gegeben durch die konvergente Reihe $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Wir wollen

$$\zeta(s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - p_i^{-s}\right)} \qquad s \in (1, \infty) \tag{1}$$

zeigen, wobei $p_1, p_2, p_3, \ldots = 2, 3, 5, \ldots$ eine Durchnummerierung der Primzahlen darstellt. Sei $s \in (1, \infty)$ fix:

a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{P})$ mit

$$\mathbb{P}(N) := \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n \in N} \frac{1}{n^s}, \quad N \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

ein Wahrscheinlichkeitsraum ist, wobei $\mathbb{N} = 1, 2, 3, ...$ und $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ die Potenzmenge von $\mathbb{N}$ bezeichnet (i.e. $N \subseteq \mathbb{N}$).

b) Sei p eine Primzahl $N_p := \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \text{ ist teilbar durch } p\}$. Berechnen Sie $\mathbb{P}(N_p)$.

c) Zeigen Sie, dass die Familie von Ereignissen $(N_p)_{p \text{ prim}}$ unabhängig ist.

d) Berechnen Sie

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{p \text{ prim}} N_p^c\right)$$

mit Hilfe von c) und der Stetigkeitseigenschaft von $\mathbb{P}$ (Satz 3.1 im Skript), und folgern Sie daraus (1).

2. Zeigen Sie die folgende Approximation für die Poissonwahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} p_\lambda(k) &= \exp(-\lambda) \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \exp\left(-\frac{(k-\lambda)^2}{2\lambda}\right) (1 + r_\lambda(k)), \end{aligned}$$

Bitte wenden!

wobei

$$\sup\{|r_\lambda(k)|\,;|k-\lambda| \le A\sqrt{\lambda}\} \to 0. \quad \forall A > 0, \quad (\lambda \to \infty).$$

Hinweis: Verwenden Sie die gleichen Argumente wie im Beweis von Satz 2.11 im Skript, d.h. die Stirling-Formel für $k!$, dann Umschreiben mit Hilfe einer Funktion, die von $\frac{k}{\lambda}$ abhängt, und Taylorentwicklung unter Berücksichtigung dass $\frac{k}{\lambda} \to 1$.

3. Sei $\mathcal{F}$ die Mengen-Algebra gegeben durch die endlichen und koendlichen Teilmengen von einem unendlichen Ereignisraum Ω, das heisst

$$\mathcal{F} := \{A \subset \Omega : |A| < \aleph_0 \quad \text{oder} \quad |A^c| < \aleph_0\} \qquad \text{wobei } \aleph_0 = |\mathbb{N}|.$$

$\mathbb{P}$ ist definiert auf $\mathcal{F}$ als

$$\mathbb{P}(A) := \mathbb{I}\{|A^c| < \aleph_0\} = \begin{cases} 0 & A \text{ ist endlich} \\ 1 & A^c \text{ ist endlich.} \end{cases}$$

Beweise:

a) $\mathbb{P}$ ist endlich additiv;

b) $\mathbb{P}$ ist *nicht* abzählbar additiv wenn Ω abzählbar ist;

c) $\mathbb{P}$ ist abzählbar additiv wenn Ω überabzählbar ist.

Sei nun $\mathcal{F}$ die σ-Algebra gegeben durch die abzählbaren und koabzählbaren (d.h. das Komplement ist abzählbar) Teilmengen von einem überabzählbaren Ω.
Wir definieren $\mathbb{P}(A) := \mathbb{I}\{|A^c| \le \aleph_0\} = \mathbb{I}\{A^c \text{ ist abzählbar}\}$.

d) Beweise, dass $\mathbb{P}$ abzählbar additiv ist.

4. R-Aufgabe. In dieser Aufgabe vergleichen wir die Binomial- mit Poisson Verteilung. Wir betrachten $Y \sim \text{Pois}(\lambda)$ und $X_i \sim \text{Binom}(n_i, p = \lambda/n_i)$ wobei $\lambda = 5$ und $n = (10, 20, 50, 100, 500)$

a) Plotte $\mathbb{P}(Y = k)$ und $\mathbb{P}(X_i = k)$, $i = 1, \ldots, 5$ für $k = 0, \ldots, 20$ (mit `type='l'`).

b) Plotte den relativen Fehler

$$\frac{\mathbb{P}(X_i = k)}{\mathbb{P}(Y = k)} - 1 \qquad (i = 1, \ldots, 5)$$

für $k = 0, \ldots, 20$.

Siehe nächstes Blatt!

Abgabe der R-Aufgabe:
per Email an die jeweilige AssistentIn bis Dienstag 13 Uhr, im Format:
familienname_vorname_serieNr.R
Webseite: $http://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2013/math/wr_s/$