Ferienserie

1. Eine Funktion f sei bzgl. zylindrischen Koordinaten (r, φ, z), $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi,\ z = z$ gegeben. Ihr Integral über ein Gebiet B werde mit I bezeichnet.

a) Bestimmen Sie anhand geometrischer Überlegungen den fehlenden Ausdruck in

$$I = \int_B f(r, \varphi, z) \boxed{?}\, dr\, d\varphi\, dz. \tag{1}$$

Überprüfen Sie das Resultat mit Hilfe der Jacobi-Determinante.

b) Benutzen Sie (1), um das Volumen eines massiven Zylinders mit Höhe H und Radius R nachzurechnen. (Ergebnis: $\pi\, H\, R^2$)

c) Benutzen Sie (1), um das Volumen eines geraden Kreiskegels mit Höhe H und Grundflächenradius R nachzurechnen. (Ergebnis: $\frac{\pi}{3}\, H\, R^2$)

2. **a)** Eine Dichtefunktion sei gegeben durch $\varrho(x, y, z) = 1 + \frac{r}{4}$. Bestimmen Sie den Schwerpunkt der Halbkugel $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 16 \text{ und } z \geq 0\}$.

b) Bestimmen Sie $\iint\limits_B e^{xy}\, \mathrm{d}B$, wobei der Bereich B von den Hyperbeln $xy = 1$ und $xy = 4$ sowie den Linien $\frac{y}{x} = 1$ und $\frac{y}{x} = 3$ begrenzt wird. Skizzieren Sie den Bereich B vor und nach der Koordinatentransformation.

3. Seien f ein Skalarfeld und $K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}$ und $L = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$ Vektorfelder im $\mathbb{R}^3$, jeweils hinreichend oft stetig differenzierbar.
Der *Gradient* von f ist das Vektorfeld $\operatorname{grad} f := \nabla f$.
Die *Rotation* von K ist das Vektorfeld

$$\operatorname{rot} K := \nabla \times K = \begin{pmatrix} \frac{\partial K_3}{\partial y} - \frac{\partial K_2}{\partial z} \\ \frac{\partial K_1}{\partial z} - \frac{\partial K_3}{\partial x} \\ \frac{\partial K_2}{\partial x} - \frac{\partial K_1}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Die *Divergenz* von K ist das Skalarfeld

$$\operatorname{div} K := \nabla \cdot K = \frac{\partial K_1}{\partial x} + \frac{\partial K_2}{\partial y} + \frac{\partial K_3}{\partial z}.$$

Beweise folgende koordinatenfreie Identitäten:

$$\operatorname{rot}(fK) = (\operatorname{grad} f) \times K + f \cdot \operatorname{rot} K.$$

a) $\operatorname{div}(fK) = \nabla f \cdot K + f \cdot \operatorname{div} K$,

Bitte wenden!

b) $\operatorname{div}(K \times L) = L \cdot \operatorname{rot} K - K \cdot \operatorname{rot} L$,

c) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

d) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} K) = 0$

e) $\operatorname{div}(f \cdot \operatorname{rot} K) = \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{rot} K$.

4. Berechne das Wegintegral $\int_\gamma K \cdot d\mathbf{s}$ für das Vektorfeld

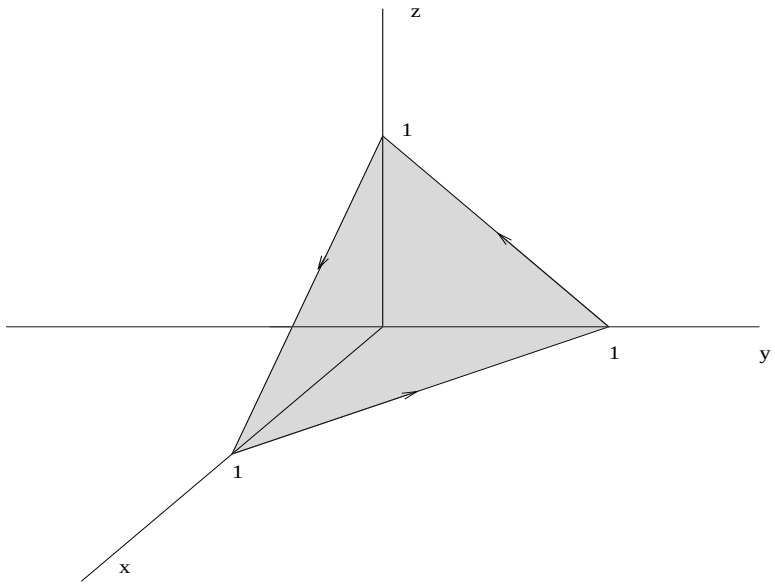
$$K(x, y, z) := (x - y + z, y - z + x, z - x + y)$$

und die Kurve γ der nachstehenden Figur

a) direkt,

b) mit Hilfe des Satzes von Stokes.

(Hinweis: Die Gesamtsituation ist symmetrisch bezüglich zyklischer Vertauschung $x \to y \to z \to x$.)



5. **a)** Überprüfen Sie die Gültigkeit des Satzes von Gauss (siehe Vorlesung) anhand des Beispiels $F(x, y, z) = (3x, xy, 2xz)$, $E = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ (Einheitswürfel im $\mathbb{R}^3$).

b) Benutzen Sie den Satz von Gauss, um das Oberflächenintegral $\iint_S F \cdot dS$ zu berechnen, wobei $F(x, y, z) = (3xy^2, xe^z, z^3)$ ist und S die Oberfläche des Zylinders $y^2 + z^2 = 1, -1 \leq x \leq 2$ bezeichnet.