7.2 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Die allgemeine lineare Differentialgleichung $n-$ter Ordnung hat die Gestalt

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = q, \tag{1}$$

wobei $x \mapsto y(x)$ die gesuchte Funktion und $a_{n-1}(x), \ldots, a_1(x), a_0(x), q(x)$ Funktionen sind.

Def: Als *Anfangswertproblem* (AWP) beschreibt man eine Differentialgleichung wie (1) zusammen mit n Anfangsbedingungen

$$y^{(i)}(t_0) = y_i, \qquad 0 \leq i \leq n-1.$$

Bem: Das Theorem von Picard-Lindelöf (siehe Struwe-Skript S. 145) garantiert unter einer "schwachen" Bedingung die Existenz, die Eindeutigkeit und die Regularität der Lösung jedes AWPs.

7.2.1 Der homogene Fall

Die Gleichung heisst *homogen* falls $q = 0$.

Für $n \geq 2$ und "variable" Koeffizienten gibt es kein allgemeines Lösungsschema mehr und man ist auf qualitative und strukturelle Aussagen angewiesen.

Allgemein kann man bemerken, dass die Menge der Lösungen der homogenen Gleichung einen Vektorraum V bildet. ($\dim V = n$)

Im Fall konstanter Koeffizienten werden wir jetzt ein Lösungsschema angeben.

Sei

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{H}$$

wobei $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$.