Serie 1

Abgabe : Am Montag, den 25. Februar in der Übungsstunde.
Einsendeschluss für die Online Aufgabe: Montag, den 25.2.2013, 10:00 Uhr

1. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren:

a) $\lim\limits_{x\to 0} (3-|x|)^{\frac{\sin x}{x}}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$.

2. Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeige:

a) Ist f stetig, so gibt es zwischen je zwei Nullstellen $x_1 < x_2$ von f eine lokale Extremalstelle $x_0 \in]x_1, x_2[$.

b) Ist f auf I differenzierbar und hat die Ableitung f' genau n Nullstellen, $n \in \mathbb{N}$, so hat die Funktion f maximal $n+1$ Nullstellen.

c) Die Gleichung $2^x = x^2$ besitzt genau 3 reelle Lösungen.

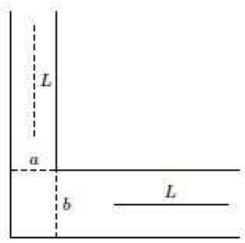
3. Zeige: der Konvergenz Radius der Potenzreihe

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \ldots$$

ist $\varrho = 1$. Sei $f(x)$ die Summe $\forall x \in (-1,1)$. Zeige: $f(x) = -\ln(1-x)$.

Hinweis: betrachte $f'(x)$.

4. **a)** Die Zeichnung zeigt eine rechteckige Strassenecke.



Wie lang darf maximal die Länge des Stabs L sein, damit er die Kurve machen kann?

b) Finde die Extremalpunkte von $f(x) = x^2 \sin(x)^2$ auf $[-1,1]$.

Bitte wenden!

5. Online-Abgabe

Frage 1

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- ◯ f ist stetig $\iff$ f ist differenzierbar
- ◯ f ist stetig $\implies$ f ist differenzierbar
- ◯ f ist stetig $\impliedby$ f ist differenzierbar
- ◯ Es gibt keinen Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit!
- ◯ Weiss nicht.

Frage 2

Wir betrachten die Funktionenfolge (f_n) mit $f_n : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, x \mapsto (x^{1/2} + n^{-1})^2$. Welche der Aussagen gilt?

- ◯ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$
- ◯ Die Funktionenfolge konvergiert gleichmässig.
- ◯ Für alle $M > 0$ gilt, dass die Funktionenfolge $f_n|_{[0,M]} : [0, M] \to \mathbb{R}$ gleichmässig konvergiert.

Frage 3

Durch zweifache Anwendung der Regel von de l'Hôpital folgt

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2} = 3.$$

Was stimmt an dieser Überlegung nicht? Die Regel von de l'Hôpital ist ...

- ◯ nicht anwendbar, weil das Zählerpolynom jeweils einen höheren Grad als das Nennerpolynom hat.
- ◯ nicht anwendbar, weil die beiden ersten Brüche keine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion beschreiben.
- ◯ auf den ersten Bruch nicht anwendbar, weil Zähler und Nenner für $x \to 1$ nicht beide gegen 0 oder ∞ streben.
- ◯ auf den zweiten Bruch nicht anwendbar, weil Zähler und Nenner für $x \to 1$ nicht beide gegen 0 oder ∞ streben.
- ◯ durchaus anwendbar und die Überlegung ist richtig!