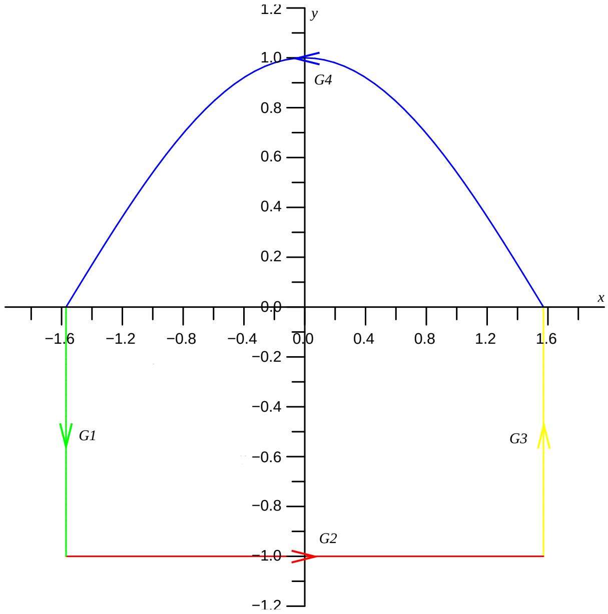
Musterlösung 10

1. Zunächst skizzieren wir den Rand ∂B des Gebietes

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2},\ -1 \le y \le \cos(x) \right\}.$$



Nun parametrisieren wir die vier Randstücke G_1, G_2, G_3 und $-G_4$ durch die vier Kurvenstücke

$$\gamma_1 : t \mapsto \left(\begin{smallmatrix} -\frac{\pi}{2} \\ -t \end{smallmatrix}\right), \quad t \in [0,1], \qquad \gamma_2 : t \mapsto \left(\begin{smallmatrix} -\frac{\pi}{2}+t\pi \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \quad t \in [0,1],$$

$$\gamma_3 : t \mapsto \left(\begin{smallmatrix} \frac{\pi}{2} \\ t-1 \end{smallmatrix}\right), \quad t \in [0,1], \qquad \gamma_4 : t \mapsto \left(\begin{smallmatrix} t \\ \cos(t) \end{smallmatrix}\right), \quad t \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right].$$

Die Tangentialvektoren an diese Kurvenstücke sind

$$\dot\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \dot\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}, \ \dot\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ \text{ und } \ \dot\gamma_4(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int_{\gamma_1} K \cdot dx = \int_{\gamma_1} \left\langle K(\gamma_1(t)), \dot\gamma_1(t) \right\rangle dt = \int_{\gamma_1} \left\langle \begin{pmatrix} y(t) \\ \sin(x(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot x(t) \\ \dot y(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} -t \\ \sin(-\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^1 1\, dt = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &:= \int_{\gamma_2} K \cdot dx = \int_{\gamma_2} \left\langle K(\gamma_2(t)), \dot\gamma_2(t) \right\rangle dt = \int_{\gamma_2} \left\langle \begin{pmatrix} y(t) \\ \sin(x(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot x(t) \\ \dot y(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ \sin(-\frac{\pi}{2}+t\pi) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt = -\pi \int_0^1 1\, dt = -\pi \end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
I_3 &:= \int_{\gamma_3} K \cdot dx = \int_{\gamma_3} \Big\langle K(\gamma_3(t)), \dot\gamma_3(t) \Big\rangle \, dt = \int_{\gamma_3} \left\langle \begin{pmatrix} y(t) \\ \sin(x(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot x(t) \\ \dot y(t) \end{pmatrix} \right\rangle \, dt \\
&= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} t-1 \\ \sin(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \, dt = \int_0^1 1 \, dt = 1
\end{aligned}
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
I_4 &:= \int_{\gamma_4} K \cdot dx = \int_{\gamma_4} \Big\langle K(\gamma_4(t)), \dot\gamma_4(t) \Big\rangle \, dt = \int_{\gamma_4} \left\langle \begin{pmatrix} y(t) \\ \sin(x(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot x(t) \\ \dot y(t) \end{pmatrix} \right\rangle \, dt \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\langle \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \right\rangle \, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \big[\cos(t) - \sin^2(t) \big] \, dt \\
&= \sin(t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(t)\cos(t)}{2} \right] \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2 - \frac{\pi}{2} \, .
\end{aligned}
$$

Unter Berücksichtigung der Durchlaufrichtungen der gewählten Parametrisierungen der Randkurvenstücke gilt

$$
I_b = \oint_{\partial B} K \cdot dx = I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 1 - \pi + 1 - \left[2 - \frac{\pi}{2} \right] = -\frac{\pi}{2} \, .
$$

Durch Anwendung des Satzes von Green erhalten wir das gleiche Ergebnis:

$$
\begin{aligned}
I_b &= \oint_{\partial B} K \cdot dx = \int_B \operatorname{rot}(K) \, dB = \int_B \Big[K_x^2 - K_y^1 \Big] \, dx \, dy \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-1}^{\cos(x)} [\cos(x) - 1] \, dy \, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\cos(x) - 1] \cdot [\cos(x) + 1] \, dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big[\cos^2(x) - 1 \Big] \, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \, dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx \\
&= \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(x)\cos(x)}{2} \right] \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2} \, .
\end{aligned}
$$

2. Wir werden hier die Greensche Formel benutzen. Errinern wir uns an diese Formel. *Es sei $K := (P, Q)$ ein Vekorfeld auf dem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $B \subset \Omega$ ein Bereich mit Randzyklus ∂B. Dann gilt*

$$
\int_{\partial B} (P dx + Q dy) = \int_B (Q_x - P_y) dx dy
$$

Sei B das Rechteck wie auf dem Bild 1 unten

$$
B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1\}
$$

Dann ist der Rand von B , ∂B gegeben als

$$
\partial B = \gamma - \gamma_1,
$$

Siehe nächstes Blatt!

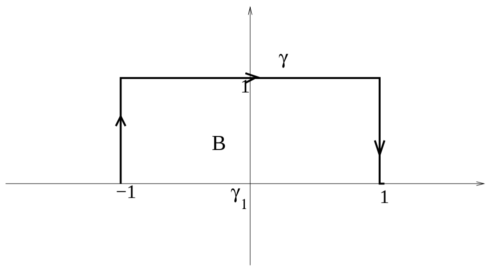


Abbildung 1: Weg γ

wo $\gamma_1 = \{(x,0)| -1 \leq x \leq 1\}$. Das Integral $\int_{\partial B} Kdz$ ist gegben als

$$\begin{aligned}\int_{\partial B} Kdz &= \int_{\partial B} (Pdx + Qdy) = \\ &= \int_{\gamma} (Pdx + Qdy) - \int_{\gamma_1} (Pdx + Qdy) \\ &= \int_{B} (Q_x - P_y) dxdy.\end{aligned} \tag{1}$$

Die letzte Gleichheit gilt nach der Formel von Green. Als $Q_x = P_y = -4x + 8y$, wir haben

$$\int_{\gamma} (Pdx + Qdy) = \int_{\gamma_1} (Pdx + Qdy) = I_{\gamma_1}$$

Um das Linienintegral I_{γ_1} zu berechnen, parametrisieren wir die Kurve $\gamma_1 = \{(t,0)| -1 \leq t \leq 1\}$,

$$I_{\gamma_1} = \int_{-1}^{1} 3t^2 dt = t^3\Big|_{-1}^{1} = 2.$$

3. Sei $c-$ Scharparameter und

$$F(x,y,c) = 0$$

die implizite Form der Kurvenscharen. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Enveloppen simultan die beide Gleichungen

$$\begin{aligned}F(x,y,c) &= 0 \\ F_c(x,y,c) &= 0\end{aligned} \tag{2}$$

erfüllen.

a) Die Enveloppen erfüllen die Gleichungen

$$\begin{aligned}F(x,y,\alpha) &= \cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y - 3 = 0 \\ F_\alpha(x,y,\alpha) &= -sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y = 0\end{aligned}$$

Um die Gleichung der Enveloppen zu finden, eliminieren wir Parameter α aus obigen Gleichungen . Also, aus der zweiten Gleichung erhalten wir

$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{y}{x} \Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \cos(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Bitte wenden!

Wenn wir das Resultat in die zweite Gleichung einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned}\cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y - 3 &= \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 3 = 0\\ &\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 9 = 3^2. \qquad (3)\end{aligned}$$

Die Enveloppe ist der Kreis mit dem Mittelpunkt im Ursprung und mit dem Radius 3.

b) Die Enveloppen erfüllen die Gleichungen

$$\begin{aligned}F(x, y, C) &= Cx + C^2 - y = 0\\ F_C(x, y, C) &= x + 2C = 0.\end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung erhalten wir $C = \frac{-x}{2}$, und wenn wir das in die erste Gleichung einsetzen erhalten wir die Gleichung der Parabel

$$y = -\frac{x^2}{4}.$$

c) Die Enveloppen erfüllen die Gleichungen

$$\begin{aligned}F(x, y, C) &= (x - C)^2 - y^3 = 0\\ F_C(x, y, C) &= -2(x - C) = 0.\end{aligned}$$

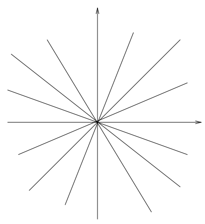
Aus der zweiten Gleichung folgt $x = C$. Wenn wir das Resultat in die erste Gleichung einsetzen erhalten wir $y = 0$.

4. Die Feldlinien des Vektorfeldes links sehen qualitativ aus wie

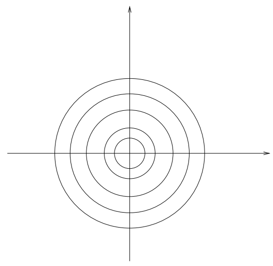
Siehe nächstes Blatt!

Frage 1

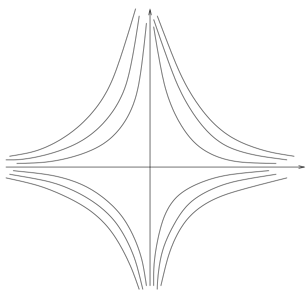
$$K(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



√ ○



○



○

Sei V ein Vekorfeld. Eine Kurve $\gamma \subset \Omega$ deren Tangente in jedem Punkt zum dort angehefteten Vektorfeld parallel ist heisst eine Feldlinie von V. Falls $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$, dann erfüllt γ die Differentialgleichung

$$\dot{\gamma}(t) = V(\gamma(t))$$

In diesem Beispiel ist $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ also $x(t)$ und $y(t)$ erfüllen die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = x(t), \quad \dot{y} = y(t).$$

Bitte wenden!

Daraus folgt, dass

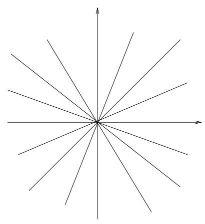
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$
$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(y) = \ln(x) + c_0 \Rightarrow$$
$$y = cx$$

Die Feldlinien sind in diesem Fall die Geraden durch den Urschprung wie auf dem ersten Bild.

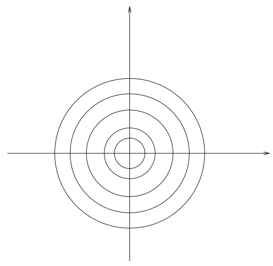
Siehe nächstes Blatt!

Frage 2

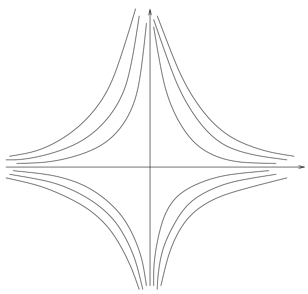
$$K(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$



○



○



√ ○

Die Feldlinie $\gamma = (x(t), y(t))$ erfüllt in diesem Fall die Differentialgleichung

$$\dot{x} = x, \ \ \dot{y} = -y$$

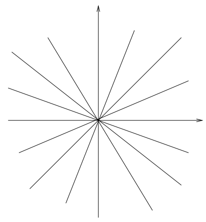
Daraus folgt, dass

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow$$
$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(y) = -\ln(x) + c_0 \Rightarrow yx = c$$

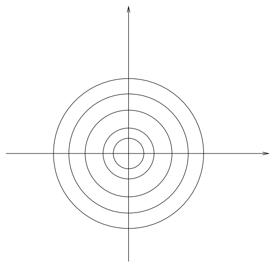
Bitte wenden!

Frage 3

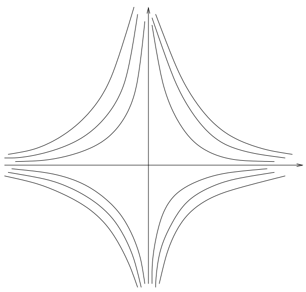
$$K(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$



○



√ ○



○

Die Feldlinie $\gamma = (x(t), y(t))$ erfüllt in diesem Fall die Differentialgleichung

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x$$

Daraus folgt, dass

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow ydy = -xdx \Rightarrow$$
$$\int ydy = -\int xdx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c_0 \Rightarrow x^2 + y^2 = c$$

Die Feldlinien sind konzentrische Kreisen.