Musterlösung 12

1. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$I = \iint\limits_S U(x,y,z)dS = \iint_B U(r(u,v))|r_u \times r_v| d\mu(u,v),$$

wo die Fläche S parametriziert durch

$$S : (u,v) \mapsto r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad (u,v) \in B$$

wird. Hier ist die Parameterdarstellung von S gegeben als Graph einer Funktion

$$S : (x,y) \mapsto (x,y,z(x,y))$$

Deswegen ist Oberfächenelement, $d\omega = |r_u \times r_v| d\mu(u,v) = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$. Das gesuchte Integral ist gleich

$$I = \iint\limits_B U(x,y,z)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy, \tag{1}$$

wobei B die Projektion der Fläche S auf xy Ebene ist. Hier ist $B : x^2+y^2 = 2, z = 0$. Wir setzen $z_x = -2x, z_y = -2y$ in die Gleichung (1) ein und erhalten

$$I = \iint\limits_B U(x,y,z)\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy. \tag{2}$$

a) Falls $U(x,y,z) = 1$, die Gleichung (2) ist äquivalent mit

$$I = \iint\limits_B \sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy.$$

Um dieses Integral zu berechnen benutzen wir polar Koordianten (r,φ). Damit ist das Integral I gleich

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} r\sqrt{1+4r^2}dr = \int_0^{2\pi} \frac{1}{12}(1+4r^2)^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{13\pi}{3}.$$

Physikalisch darstellt das Integral I der Flächeninhalt des Gebietes S, oder das Mass von S im Fall, dass die Dichte $\varrho = 1$ ist.

b) Falls $U(x,y,z) = x^2+y^2$, die Gleichung (2) ist äquivalent mit $I = \iint\limits_B (x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4^2}dxdy$, oder im Polarkoordinaten

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} r^3\sqrt{1+4r^2}drd\varphi = \frac{149\pi}{30}.$$

Das letzte Integral haben wir mit der Substitution $u = \sqrt{1+4r^2}$ berechent. Physicalisch darstellt dieses Integral das Trägheitsmoment bezüglich der $z-$Achse angenommen die Dichte $\varrho = 1$, oder das Mass von S angenommen $\varrho = x^2+y^2$.

Bitte wenden!

c) Falls $U(x,y,z) = 3z$, wir bekommen

$$I = \iint\limits_B 3z\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy = \iint_B 3(2-(x^2+y^2))\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy,$$

oder im Polarkoordinaten

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} 3r(2-r^2)\sqrt{1+4r^2}drd\varphi = \frac{111\pi}{10}.$$

Physikalisch bezeichnet dieses Integral das Mass von S angenommen $\varrho = 3z$.

2. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass den Flächeninhlat $\omega(S)$ der Fläche

$$S : B \to \mathbb{R}^3, (z,\varphi) \mapsto r(z,\varphi)$$

gegen als

$$\omega(S) := \int_B |r_z(z,\varphi) \times r_\varphi(z,\varphi)|d\mu(z,\varphi)$$

ist. Der unter dem Integralzeichen erscheinende Ausdruck

$$d\omega := |r_z(r,\varphi) \times r_\varphi(z,\varphi)|d\mu(z,\varphi)$$

wird als Oberfächenelement bezeichnet. Hier ist die Parameterdarstellung von S gegeben als

$$r(z,\varphi) = (x,y,z) = (\varrho(z)\cos(\varphi), \varrho(z)\sin(\varphi), z), \quad \varphi \in [0,2\pi], z \in [a,b]$$

Damit sind die Tangential Vektoren r_z und r_φ

$$r_z = (\varrho'(z)\cos(\varphi), \varrho'(z)\sin(\varphi), 1), \quad v_\varphi = (-\varrho(z)\sin(\varphi), \varrho(z)\cos(\varphi), 0)$$

und der Normalvektor $n = r_z \times r_\varphi = (-\varrho(z)\cos(\varphi), \varrho(z)\sin(\varphi), \varrho'(z)\varrho(z))$. Die Länge des Vektors n, ist $|n| = \sqrt{\varrho(z)^2(1+\varrho'(z)^2)}$. Das liefert das Oberflächenelement

$$d\omega = \varrho(z)\sqrt{1+\varrho'(z)^2}d\varrho d\varphi$$

Wir haben daher

$$\omega(S) = \iint\limits_B \varrho(z)\sqrt{1+\varrho'(z)^2}d\varrho d\varphi,$$

debei ist B das Rechteck $B = [0,2\pi] \times [a,b]$, also

$$\omega(S) = \int_0^{2\pi}\int_a^b \varrho(z)\sqrt{1+\varrho'(z)^2}d\varrho d\varphi = 2\pi\int_a^b \varrho(z)\sqrt{1+\varrho'(z)^2}d\varrho d\varphi.$$

3. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass den Flächeninhlat $\omega(S)$ der Fläche

$$S : B \to \mathbb{R}^3, (r,\varphi) \mapsto v(r,\varphi)$$

gegen als

$$\omega(S) := \int_B |v_r(r,\varphi) \times v_\varphi(r,\varphi)|d\mu(r,\varphi)$$

Siehe nächstes Blatt!

ist. Der unter dem Integralzeichen erscheinende Ausdruck

$$d\omega := |v_r(r,\varphi) \times v_\varphi(r,\varphi)| d\mu(r,\varphi)$$

wird als Oberfächenelement bezeichnet. Hier ist

$$v(r,\varphi) = (x(r,\varphi), y(r,\varphi), z(r,\varphi)) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), c\varphi), \quad r \in [0,R], \varphi \in [0,2\pi]$$

Damit sind die Tangential Vektoren v_r und v_φ

$$v_r = (\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0), \quad v_\varphi = (-r\sin(\varphi), r\cos(\varphi), c)$$

und der Normalvektor $n = v_r \times v_\varphi = (c\sin(\varphi), -c\cos(\varphi), r)$. Die Länge des Vektors n, ist $|n| = \sqrt{c^2+r^2}$. Der Integrationsbereich ist: $B = [0,R] \times [0,2\pi]$. Nach obiger Formel ist den Flächeninhalt $\omega(S)$ gleich

$$\begin{aligned}
\omega(S) &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \sqrt{c^2+r^2} dr d\varphi = 2\pi \int_0^R \sqrt{c^2+r^2} dr \\
&= 2\pi \Big(\frac{1}{2} r \cdot \sqrt{r^2+c^2} + \frac{1}{2} c^2 \ln(r + \sqrt{r^2+c^2}) \Big) \Big|_0^R \\
&= 2\pi \Big(\frac{R}{2} \cdot \sqrt{R^2+c^2} + \frac{c^2}{2} \ln(R + \sqrt{R^2+c^2}) - \frac{c^2}{2} \ln(c) \Big). \qquad (3)
\end{aligned}$$

4. Sei f eine zweimal stetig differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}^3$ und $\vec{v}, \vec{w}$ Vektorfelder auf $\mathbb{R}^3$.

Bitte wenden!

Frage 1

$\mathrm{div}(\mathrm{grad} f) = \triangle f$

○ Linke und rechte Seite dieser Formel sind beide Vektorfelder.

√ ○ Linke und rechte Seite dieser Formel sind beide Funktionen

√ ○ Die Formel ist richtig.

Errinern wir uns an die Deffinition der Divergenz, Rotation, Gradient und Laplacian. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, V = (V_1, V_2, V_3)$ ein Vektorfeld, dann ist die Divergenz von V eine Skalarfunktion

$$\mathrm{div}(V) = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z},$$

die Rotation von V ist ein Vektorfeld

$$\mathrm{rot}(V) = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{pmatrix} = \Big(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}, \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}, \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\Big).$$

der Gradient von f ist ein Vektorfeld

$$\mathrm{grad}(f) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}),$$

und die Laplacian von f ist eine Skalarfunktion

$$\triangle(f) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}.$$

Damit ist

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad} f) = \mathrm{div}(f_x, f_y, f_z) = \frac{\partial f_x}{x} + \frac{\partial f_y}{y} + \frac{\partial f_z}{z} = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \triangle(f).$$

Also, die Formel ist richtig und beide Seite dieser Formel sind Skalarfunktionen.

Siehe nächstes Blatt!

Frage 2

$\mathrm{rot}(f\overrightarrow{v}) = f\mathrm{rot}(\overrightarrow{v}) + \mathrm{grad}(f) \times \overrightarrow{v}$

√ ◯ Linke und rechte Seite dieser Formel sind beide Vektorfelder.

◯ Linke und rechte Seite dieser Formel sind beide Funktionen

√ ◯ Die Formel ist richtig.

Beide Seite dieser Formel sind Vektorfelder. Sei $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$, dann ist

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}(f\overrightarrow{v}) &= \Big(\frac{\partial(fv_3)}{\partial y} - \frac{\partial(fv_2)}{\partial z}, \frac{\partial(fv_1)}{\partial z} - \frac{\partial(fv_3)}{\partial x}, \frac{\partial(fv_2)}{\partial x} - \frac{\partial(fv_1)}{\partial y}\Big)\\ &= f\Big(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\Big) + \Big(f_y v_3 - f_z v_2, f_z v_1 - f_x v_3, f_x v_2 - f_y v_1\Big)\end{aligned}$$

Zu überprüfen ob die Formel richtig ist müssen wir noch $\mathrm{grad}(f) \times \overrightarrow{v}$ berechen.

$$\mathrm{grad}(f) \times \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ f_x & f_y & f_z \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \Big(f_y v_3 - f_z v_2, f_z v_1 - f_x v_3, f_x v_2 - f_y v_1\Big).$$

Die Formel ist also richtig.

Frage 3

$\mathrm{div}(f\overrightarrow{v}) = f\mathrm{div}(\overrightarrow{v}) + \mathrm{grad}(f) \cdot \mathrm{rot}(\overrightarrow{v})$

◯ Linke und rechte Seite dieser Formel sind beide Vektorfelder.

√ ◯ Linke und rechte Seite dieser Formel sind beide Funktionen

◯ Die Formel ist richtig.

Offensichtlich sind beide Seite diser Formel Funktionen. Wir haben

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(f\overrightarrow{v}) &= \frac{\partial(fv_1)}{\partial x} + \frac{\partial(fv_2)}{\partial y} + \frac{\partial(fv_3)}{\partial z}\\ &= f\mathrm{div}(\overrightarrow{v}) + f_x v_1 + f_y v_2 + f_z v_3\\ &= f\mathrm{div}(\overrightarrow{v}) + \mathrm{grad}(f) \cdot \overrightarrow{v}.\end{aligned}$$

Die Formel ist Falsch.

Bitte wenden!

Frage 4

$\mathrm{rot}(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v}\mathrm{div}(\overrightarrow{w}) - \overrightarrow{w}\mathrm{div}(\overrightarrow{v})$

√ ◯ Linke und rechte Seite dieser Formel sind beide Vektorfelder.

◯ Linke und rechte Seite dieser Formel sind beide Funktionen

◯ Die Formel ist richtig.

Offensichtlich sind beide Seite dieser Formel vektorfelder. Sei $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ und $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$, dann ist

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = (v_2w_3 - v_3w_2, w_1v_3 - w_3v_1, v_1w_2 - w_1v_2) = (u_1, u_2, u_3)$$

Und die Rotation dieses Vektorfeles ist

$$V = \mathrm{rot}(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} = \Big(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\Big)$$

Die erste Koordinate dieses Vektors ist

$$V_1 = \frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(w_1v_3 - w_3v_1) - \frac{\partial}{\partial y}(v_2w_3 - v_3w_2).$$

Sei nun $W = \overrightarrow{v}\mathrm{div}(\overrightarrow{w}) - \overrightarrow{w}\mathrm{div}(\overrightarrow{v})$. Dann ist die erste Koordinate des Vektors W, W_1 gleich

$$W_1 = v_1\mathrm{div}(\overrightarrow{w}) - w_1\mathrm{div}(\overrightarrow{v}).$$

Die Formel ist falsch, als $V_1 \neq W_1$.

Frage 5

$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(f)) = 0$

◯ Linke und rechte Seite dieser Formel sind beide Vektorfelder.

◯ Linke und rechte Seite dieser Formel sind beide Funktionen

√ ◯ Die Formel ist richtig.

Die linke Seie der Formel ist gleich

$$L = \mathrm{rot}(f_x, f_y, f_z) = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix} = \Big(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\Big)$$

Als f zweimal stetig differenzierbare Funktion ist, dann sind parielle Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial i \partial j} = \frac{\partial^2 f}{\partial j \partial i}$, $i, j = x, y, z$. Deswegen ist $L = 0$, und die Formel ist richtig.

Siehe nächstes Blatt!

Frage 6

Sei $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

$$\mathrm{grad}(\mathrm{div}(\overrightarrow{v})) - \mathrm{rot}(\mathrm{rot}(\overrightarrow{v}) = \begin{pmatrix} \triangle v_1 \\ \triangle v_2 \\ \triangle v_3 \end{pmatrix}$$

√ ◯ Linke und rechte Seite dieser Formel sind beide Vektorfelder.

◯ Linke und rechte Seite dieser Formel sind beide Funktionen

◯ Die Formel ist richtig.

Frage 7

$\mathrm{grad}(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v} \cdot \mathrm{rot}(\overrightarrow{w}) + \overrightarrow{v} \cdot \mathrm{rot}(\overrightarrow{w})$

◯ Linke und rechte Seite dieser Formel sind beide Vektorfelder.

◯ Linke und rechte Seite dieser Formel sind beide Funktionen

◯ Die Formel ist richtig.