Musterlösung 3

1. Wir parametrisieren den Integrationsbereich in zylindrischen Koordinaten, das heisst

$$x = r\cos(\varphi),\ y = r\sin(\varphi), z = z.$$

Aus der Vorlesung wissen wir dass,

$$I = \iiint\limits_R f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{R'} f(r,\varphi,z)|J|drd\varphi dz.$$

Hier bezeichnet R' den neuen Integrationsbereich (die Grenze für r, φ und z) und J ist die Jacobi determinante der Transformation

$$(r,\varphi,z) \mapsto (x(r,\varphi,z), y(r,\varphi,z), z(r,\varphi,z)).$$

Die Jacobi determinante für zylindrische Transformation ist $J = r$. Wenn wir den Paraboloid auf die (x,y) Ebene projezieren erhalten wir einen Kreis $x^2 + y^2 \leq 9 \Rightarrow r^2 \leq 9$. Also $r \leq 3$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$. Für jedes fixierte r ist z zwischen 0 und $9 - r^2$. Jetz können wir das Integral berechnen

$$\begin{aligned}
I &= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{3}\int_0^{9-r^2} r^2 \cdot r dz dr d\varphi \\
&= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{3} r^3(9-r^2) dr d\varphi \\
&= \int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{9}{4}r^4 - \frac{1}{6}r^6\Big|_0^3\right)d\varphi \\
&= \int\limits_0^{2\pi}\frac{243}{4}d\varphi = \frac{243}{2}\pi.
\end{aligned}$$

2. Wir parametrisieren den Integrationsbereich in Kugelkoordinaten, also

$$x = r\cos(\vartheta)\cos(\varphi),\ y = \cos(\vartheta)\sin(\varphi),\ z = r\sin(\vartheta).$$

Aus der Vorlesung ist bekannt dass

$$I = \iiint\limits_R f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{R'} f(r,\varphi,\vartheta)|J|drd\varphi d\vartheta$$

Hier bezeichnet R' den neuen Integrationsbereich (die Grenze für r, ϑ und φ) und J ist die Jacobi determinante der Transformation

$$(r,\varphi,\vartheta) \mapsto (x(r,\varphi,\vartheta), y(r,\varphi,\vartheta), z(r,\varphi,\vartheta)).$$

Bitte wenden!

Aus der Vorlesung ist auch bekannt dass $J = r^2\cos(\vartheta)$. In der Aufgabe ist gegeben dass $\vartheta \in [\pi/4, \arctan(2)]$. Der Bereich liegt im ersten Oktant, deswegen haben wir $\varphi \in [0, \pi/2]$. Aus $x^2 + y^2 + z^2 \leq 6$ erhalten wir $r \leq \sqrt{6}$. Also,

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_R f(x,y,z)dxdydz &= \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_{\pi/4}^{\arctan(2)} \int\limits_0^{\sqrt{6}} \frac{1}{r} r^2 \cos(\vartheta) dr d\vartheta d\varphi \\
&= \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_{\pi/4}^{\arctan(2)} \cos(\vartheta) d\vartheta d\varphi \\
&= 3 \int\limits_0^{\pi/2} \sin(\vartheta)\Big|_{\pi/4}^{\arctan(2)} d\varphi \\
&= 3 \int\limits_0^{\pi/2} (\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}}) d\varphi \\
&= \frac{3\pi}{2}(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}})
\end{aligned}$$

3. Die Anzahl der Hasen im Wald ist gegeben als

$$A = \iint\limits_W \varrho(x,y)dxdy$$

Hier W bezeichent den Wald und $\varrho(x,y)$ ist die Bevölkerungsdichte. Als ϱ proportional zum Abstand von der Strasse ist, haben wir $\varrho(x,y) = k(5-y)$ ($5-y$ ist der Abstand von der Strasse) und k ist eine positive Konstante. Auf der x Achse ($y = 0$) ist $\varrho = 10$, also $\varrho(y) = 2(5-y)$. Um die Anzahl der Hasen zu finden teilen wir Integrationsbereich in 3 Teile.

$$\begin{aligned}
I &= \{(x,y) \in W : x \in [-2,0]\} \Rightarrow y \in [-\frac{5}{2}x, 5] \\
II &= \{(x,y) \in W : x \in [0,6]\} \Rightarrow y \in [0,5] \\
III &= \{(x,y) \in W : x \in [6,8]\} \Rightarrow y \in [\frac{5}{2}x - 15, 5]
\end{aligned}$$

Sei

$$\begin{aligned}
A_1 &= \iint\limits_I 2(5-y)dydx = \int\limits_{-2}^{0} \int\limits_{-5x/2}^{5} 2(5-y)dydx \\
&= \int_{-2}^{0} \left(10y - y^2\right)\Big|_{\frac{-5}{2}x}^{5} dx \\
&= \int_{2}^{0} \left(25 + 25x + \frac{25}{4}x^2\right)dx \\
&= \left(25x + \frac{25}{2}x^2 + \frac{25}{12}x^3\right)\Big|_{-2}^{0} \\
&= -\left(-50 + 50 - \frac{25 \cdot 8}{12}\right) = \frac{50}{3}
\end{aligned} \tag{1}$$

Siehe nächstes Blatt!

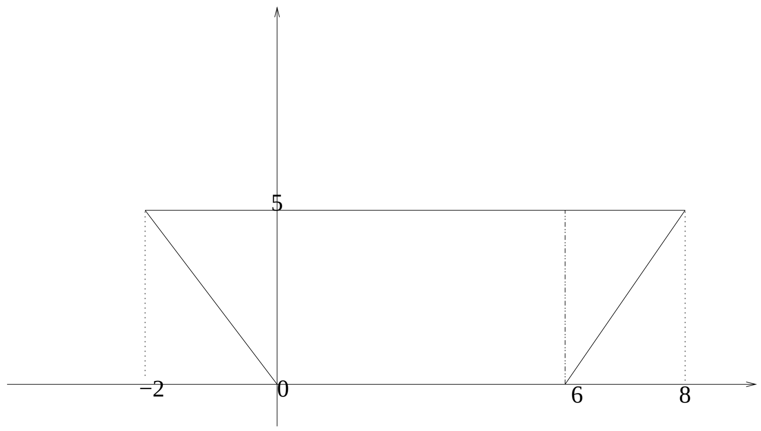

Abbildung 1: Wald

$$
\begin{aligned}
A_2 = \iint\limits_{II} \varrho(x,y)dxdy &= \int\limits_0^6 \int\limits_0^5 2(5-y)dydx \\
&= \int_0^6 \Big(10y - y^2\Big)\Big|_0^5 \\
&= \int_0^6 25dx = 150
\end{aligned} \tag{2}
$$

und

$$
\begin{aligned}
A_3 = \iint\limits_{III} \varrho(x,y)dxdy &= \int\limits_6^8 \int\limits_{5x/2-15}^5 2(5-y)dydx \\
&= \int\limits_6^8 \Big(10y - y^2\Big)\Big|_{5x/2-15}^5 dx \\
&= \int\limits_6^8 \Big(25 - 10(\frac{5x}{2} - 15) + (\frac{5x}{2} - 15)^2\Big)dx \\
&= \int_6^8 \Big(25 - 25x + 150 + \frac{25x^2}{4} - 75x + 225\Big)dx \\
&= \int_6^8 \Big(400 - 100x + \frac{25x^2}{4}\Big)dx \\
&= \Big(400x - 50x^2 + \frac{25x^3}{12}\Big)\Big|_6^8 \\
&= 16.66
\end{aligned} \tag{3}
$$

Schliesslich, die Anzahl der Hasen ist $A = A_1 + A_2 + A_3 \sim 183$.

Bitte wenden!

4. Frage 1

Bestimme die in der Formel

$$\int_B f(x,y,z)\,d\mu(x,y,z) = \int_{\dots}^{\dots} \left(\int_{\dots}^{\dots} \left(\int_{\dots}^{\dots} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx$$

die durch ... angedeuteten Integrationsgrenzen für die folgenden Bereiche B:

a) der durch die Flächen $x^2+y^2=R^2$, $z=0$, $z=H$ begrenzte Zylinder,

○ $\int\limits_{-R}^{R}\int\limits_{-R}^{R}\int\limits_{0}^{H} f(x,y,z)dzdydz$

√ ○ $\int\limits_{-R}^{R}\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\int\limits_{0}^{H} f(x,y,z)dzdydx$

○ $\int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_0^H f(x,y,z)dzdydx$

a)
$$\begin{aligned} B &:= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \middle|\, z\in[0,H]\,,\ x^2+y^2\le R^2\right\} \\ &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \middle|\, x\in[-R,R]\,,\ y\in\left[-\sqrt{R^2-x^2},\sqrt{R^2-x^2}\right],\ z\in[0,H]\right\} \\ \Rightarrow & \int\limits_B f(x,y,z)\,d\mu\,(x,y,z) = \int\limits_{-R}^{R}\ \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\ \int\limits_{0}^{H} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx \end{aligned}$$

b) der durch die Flächen $x^2+y^2=R^2$, $x+y+z=0$, $x+y+z=1$ begrenzte, schief abgeschnittene Zylinder,

○ $\int\limits_{0}^{R}\int\limits_{0}^{R}\int\limits_{0}^{1-y-x} f(x,y,z)dzdxdy$

○ $\int\limits_{-R}^{R}\int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}}\int\limits_{-y-x}^{1-x-y} f(x,y,z)dzdydx$

√ ○ $\int\limits_{-R}^{R}\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\int\limits_{-x-y}^{1-x-y} f(x,y,z)dzdydx$

b)
$$\begin{aligned} B &:= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \middle|\, x^2+y^2\le R^2,\ 0\le x+y+z\le 1\right\} \\ &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \middle|\, \begin{array}{l} x\in[-R,R]\,,\ y\in\left[-\sqrt{R^2-x^2},\sqrt{R^2-x^2}\right], \\ z\in[-x-y,1-x-y] \end{array}\right\} \\ \Rightarrow & \int\limits_B f(x,y,z)\,d\mu\,(x,y,z) = \int\limits_{-R}^{R}\ \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\ \int\limits_{-(x+y)}^{1-(x+y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

c) der durch die Bedingungen $x = 2z$, $x^2 + y^2 = (1-z)^2$ definierte, schief abgeschnittene Kreiskegel.

√ ○ $\int\limits_{-2}^{\frac{2}{3}} \int\limits_{-\sqrt{-\frac{3x^2}{4}-x+1}}^{\sqrt{-\frac{3x^2}{4}-x+1}} \int\limits_{\frac{x}{2}}^{1-\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

○ $\int\limits_{0}^{1} \int\limits_{0}^{\sqrt{-\frac{3x^2}{4}-x+1}} \int\limits_{\frac{x}{2}}^{1-\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y,z)dzdydx$

○ $\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{-\frac{3x^2}{4}-x+1}}^{\sqrt{-\frac{3x^2}{4}-x+1}} \int\limits_{\frac{x}{2}}^{1-\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y,z)dzdydx$

c) $B := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{x}{2} \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2+y^2} \right\}$

Dies ist ein nach unten offener Kreiskegel mit Spitze in $z = 1$, der durch die Ebene $z = \frac{x}{2}$ begrenzt wird.

Für gegebenes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ existiert ein z mit $\frac{x}{2} \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ genau dann, wenn $\frac{x}{2} \leq 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ ist. Unter allen möglichen y wird diese Bedingung am schwächsten für $y = 0$. Als Bedingung an x ergibt sich also $\frac{x}{2} \leq 1 - \sqrt{x^2} = 1 - |x|$. Dies bedeutet

$$\begin{aligned} &\text{für } x \geq 0: \quad \tfrac{x}{2} \leq 1 - x \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \frac{2}{3} \\ &\text{für } x \leq 0: \quad \tfrac{x}{2} \leq 1 + x \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -2 \end{aligned}$$

Die Bedingung an x lautet also $x \in \left[-2, \frac{2}{3}\right]$. Die Bedingung an y lautet

$$\frac{x}{2} \leq 1 - \sqrt{x^2+y^2} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x^2+y^2} \leq 1 - \frac{x}{2} \;\Leftrightarrow\; y^2 \leq -\frac{3x^2}{4} - x + 1$$

Insgesamt folgt

$$\int\limits_B f(x,y,z)\,d\mu\,(x,y,z) = \int\limits_{-2}^{\frac{2}{3}} \int\limits_{-\sqrt{-\frac{3x^2}{4}-x+1}}^{\sqrt{-\frac{3x^2}{4}-x+1}} \int\limits_{\frac{x}{2}}^{1-\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

Bitte wenden!

5. Frage 2

In der nachstehenden Formel bezeichnen r, φ Polarkoordinaten. Was hat man an den offengelassenen Stellen einzusetzen?

$$I = \int_0^2 \int_0^x f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy dx = \int \int ? dr d\varphi$$

○ $\int_0^2 \int_0^{\pi/4} f(r) r dr d\varphi$

√ ○ $\int_0^{\pi/4} \int_0^{\frac{2}{\cos\varphi}} f(r) r dr d\varphi$

○ $\int_0^{\pi/4} \int_0^{\frac{2}{\cos\varphi}} f(r) dr d\varphi$

Der Integrationsbereich ist skiziert auf dem Bild 2.

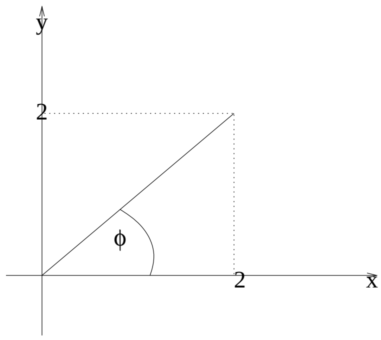

Abbildung 2: Definitionsbereich Frage 2

In Polarkoordinaten ist $x = r\cos(\varphi)$ und $y = r\sin(\varphi)$. Auf dem Bild sehen wir dass, $\varphi \in [0, \pi/4]$ und für jedes fixierte φ ist $x = r\cos(\varphi) \in [0, 2]$. Daraus folgt dass, $r \in [0, \frac{2}{\cos(\varphi)}]$. Die Jacobi Determinante für Polarkoordinaten ist $J = r$. Deswegen ist

$$I = \int_0^{\pi/4} \int_0^{\frac{2}{\cos\varphi}} f(r) r dr d\varphi.$$