

## Serie 12

1. Berechne

$$\iint_S U(x, y, z) dS,$$

wobei  $S$  die Fläche des Paraboloids  $z = 2 - (x^2 + y^2)$  oberhalb der  $xy$ -Ebene und  $U(x, y, z)$  gleich

- a) 1,
- b)  $x^2 + y^2$ ,
- c)  $3z$

ist. Was ist physikalische Interpretation in jedem der Fälle?

2. Sei  $\varrho : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine nichtnegative Funktion und  $S$  die Rotationsfläche

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = \varrho(z)^2, a \leq z \leq b\}.$$

Zeige, dass der Flächeninhalt von  $S$  gleich

$$\omega(S) = 2\pi \int_a^b \varrho(z) \sqrt{1 + \varrho'(z)^2} dz$$

ist.

3. Skizziere die Fläche mit der Parameterdarstellung

$$(r, \varphi) \mapsto \begin{cases} x := r \cos(\varphi), \\ y = r \sin(\varphi), \\ z = c\varphi \end{cases} \quad (0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi, \leq 2\pi)$$

wobei  $c$  eine Positive Konstante ist, und berechne den Flächeninhalt  $\omega(S)$ .

4. Sei  $f$  eine zweimal stetig differenzierbare Funktion auf  $\mathbb{R}^3$  und  $\vec{v}, \vec{w}$  Vektorfelder auf  $\mathbb{R}^3$ .

**Bitte wenden!**

**Frage 1**

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f$$

- Linke und rechte Seite dieser Formel sind beide Vektorfelder.
- Linke und rechte Seite dieser Formel sind beide Funktionen
- Die Formel ist richtig.

**Frage 2**

$$\operatorname{rot}(f \vec{v}) = f \operatorname{rot}(\vec{v}) + \operatorname{grad}(f) \times \vec{v}$$

- Linke und rechte Seite dieser Formel sind beide Vektorfelder.
- Linke und rechte Seite dieser Formel sind beide Funktionen
- Die Formel ist richtig.

**Frage 3**

$$\operatorname{div}(f \vec{v}) = f \operatorname{div}(\vec{v}) + \operatorname{grad}(f) \cdot \operatorname{rot}(\vec{v})$$

- Linke und rechte Seite dieser Formel sind beide Vektorfelder.
- Linke und rechte Seite dieser Formel sind beide Funktionen
- Die Formel ist richtig.

**Frage 4**

$$\operatorname{rot}(\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} \operatorname{div}(\vec{w}) - \vec{w} \operatorname{div}(\vec{v})$$

- Linke und rechte Seite dieser Formel sind beide Vektorfelder.
- Linke und rechte Seite dieser Formel sind beide Funktionen
- Die Formel ist richtig.

**Siehe nächstes Blatt!**

**Frage 5**

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(f)) = 0$$

- Linke und rechte Seite dieser Formel sind beide Vektorfelder.
- Linke und rechte Seite dieser Formel sind beide Funktionen
- Die Formel ist richtig.

**Frage 6**

$$\text{Sei } \vec{v} = (v_1, v_2, v_3).$$

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div}(\vec{v})) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{v})) = \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{pmatrix}$$

- Linke und rechte Seite dieser Formel sind beide Vektorfelder.
- Linke und rechte Seite dieser Formel sind beide Funktionen
- Die Formel ist richtig.

**Frage 7**

$$\operatorname{grad}(\vec{v} \cdot \vec{w}) = \vec{v} \cdot \operatorname{rot}(\vec{w}) + \vec{w} \cdot \operatorname{rot}(\vec{v})$$

- Linke und rechte Seite dieser Formel sind beide Vektorfelder.
- Linke und rechte Seite dieser Formel sind beide Funktionen
- Die Formel ist richtig.