

Serie 6

1. Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ hat die Funktion

$$f_\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda yz + x^4 + y^4 + z^4,$$

einen kritischen Punkt im Ursprung. Klassifizieren Sie den Typ dieses kritischen Punkts. Wenn er ausgeartet ist, liegt dann trotzdem ein lokales Extremum vor?

2. Gegeben sei die Gleichung

$$2x^2 - 4xy + y^2 - 3x + 4y = 0.$$

- a) Verifizieren Sie, dass die Gleichung in einer Umgebung von $x = 1$ implizit eine Funktion $y = \phi(x)$ definiert mit $\phi(1) = 1$.
- b) Berechnen Sie $\phi'(1)$ mit Hilfe einer expliziten Darstellung von ϕ .
- c) Berechnen Sie $\phi'(1)$ mit Hilfe der Formel für die Ableitung einer implizit gegebenen Funktion.
3. Drücke die zweite Ableitung der durch $f(x, y) = 0$ implizit definierten Funktion $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = y$ durch die partiellen Ableitungen von f aus.
4. Die Spur $\text{tr}(A)$ einer $n \times n$ Matrix A ist die Summe ihrer Diagonalelemente. Zeigen Sie: Bis auf ein Vorzeichen ist $\text{tr}(A)$ der Koeffizient von λ^{n-1} im charakteristischen Polynom $\det(A - \lambda I)$.