Serie 5

1. Gegeben sei die Funktion

$$\mathbf{I}(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin(x)}{x} \, dx \,, \qquad \alpha \geq 0.$$

a) Begründe, dass das uneigentliche Integral $\mathbf{I}(\alpha)$ für alle $\alpha > 0$ konvergiert.

b) Berechne einen integralfreien Ausdruck für die Ableitung $\mathbf{I}'(\alpha)$ (für $\alpha > 0$) und *eine* explizite Stammfunktion dieses integralfreien Ausdrucks.

Hinweis: Es darf ohne Beweis benutzt werden, dass für dieses spezielle uneigentliche Integral (für Werte $\alpha > 0$) Differentiation nach α mit der uneigentlichen Integration vertauschbar ist.

c) Verwende das Ergebnis aus **b)** und $\lim_{\alpha \to +\infty} \mathbf{I}(\alpha) = 0$, um

$$\mathbf{I}(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\alpha) \qquad (\text{für } \alpha > 0)$$

zu zeigen.

d) Beweise mit dem Gezeigten:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} \, dx = \frac{\pi}{2} \,.$$

Hinweis: Es darf ohne Beweis benutzt werden, dass die Funktion $\mathbf{I}(\alpha)$ auch im Punkt $\alpha = 0$ stetig ist.

2. Bestimme das jeweilige Taylorpolynom zweiter Ordnung der Funktionen

a) $f(x, y) = \dfrac{1}{xy}$ im Punkt $(1, 2)$,

b) $g(x, y, z) = z\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$ bei $x = y = z = 1$.

3. Berechne alle kritischen Punkte der Funktion

$$f(x, y) := x\, y^2 - \cos x$$

und bestimme, sofern sie nicht entartet sind, deren Typ .

Bitte wenden!

Online Aufgaben

4. Frage 1

Sei $f(x,y) = \operatorname{arctg}(2x^2 + 3xy - 4y^2)$. Berechne das Taylor Polynom 1. Ordnung um den Punkt $(1,1)$.

- ○ $\frac{\pi}{2} + \frac{7}{2}x - y$
- ○ $\frac{\pi}{4} + \frac{7}{2}x - \frac{5}{2}y$
- ○ $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y$

Frage 2

Sei $f(x,y) = (1+y)e^x \sin(xy)$. Berechene das Taylor Polynom 3. Ordung um den Punkt $(0,0)$.

5.
- ○ $x + y + xy + x^2y + y^2x$
- ○ $1 + y + xy + xy^2$
- ○ $xy + x^2y + xy^2$