Serie 7

1. Laplace–Operator in Polarkoordinaten:

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion der Variablen x und y. Der Laplace–Operator angewandt auf f ist gegeben durch

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy}\,.$$

Betrachte die Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} x &= x(r,\varphi) &&= r\cos\varphi\,,\\ y &= y(r,\varphi) &&= r\sin\varphi\,, \end{aligned}$$

und definiere

$$\widetilde{f}(r,\varphi) := f(x(r,\varphi), y(r,\varphi))\,.$$

Zeige, dass

$$\Delta f(x(r,\varphi), y(r,\varphi)) = \widetilde{f}_{rr}(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}\widetilde{f}_{\varphi\varphi}(r,\varphi) + \frac{1}{r}\widetilde{f}_r(r,\varphi)\,.$$

2. a) $F(x,y)$ sei gegeben durch

$$F(x,y) = e^y + y + \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}\,.$$

Zeige, dass die Lösungsmenge der Gleichung $F(x,y) = 0$ überall lokal der Graph einer Funktion $y = y(x)$ ist.

b) Hat die Funktion $y(x)$ lokale Extrema? Handelt es sich dabei um lokale Maxima oder Minima?

3. Es bezeichne T die Transformation

$$T : (u,v) \mapsto (x(u,v)\,,\, y(u,v)) = (u\cosh v\,,\, u\sinh v)\,.$$

a) Berechne die Jacobische Determinante von T.

b) Es sei B der Bereich

$$\left\{ (x\,,\,y) \mid 1 \le x^2 - y^2 \le 4\,,\; -\tfrac{1}{2}x \le y \le \tfrac{1}{2}x\,,\; x > 0 \right\}\,.$$

Parametrisiere B durch (u,v), d.h. bestimme das Urbild $\tilde{B} = T^{-1}(B)$ von B unter der Transformation T.

Hinweis: Drücke $x^2 - y^2$ und $\frac{y}{x}$ durch u und v aus!

c) Berechne

$$\int_B e^{-(x^2-y^2)}\,dx\,dy\,.$$

Bitte wenden!

Online Aufgaben

4. Frage 1

Definiere

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} \\ e^{x-y} \end{pmatrix}.$$

Die Jacobimatrix $df(x,y)$ ist

○

$$df(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x} & e^{y} \\ e^{x} & -e^{y} \end{pmatrix}.$$

○

$$df(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ e^{x-y} & -e^{x-y} \end{pmatrix}.$$

Berechne $f^{-1}(u,v)$ und $df^{-1}(u,v)$.

○

$$f^{-1}(u,v) = \Big(\frac{1}{2}(\ln(u)+\ln(v)), \frac{1}{2}(\ln(u)-\ln(v))\Big), \qquad df^{-1}(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2u} & \frac{1}{2v} \\ \frac{1}{2u} & -\frac{1}{2v} \end{pmatrix}.$$

○

$$f^{-1}(u,v) = \Big(\frac{1}{2}(\ln(u)\cdot\ln(v)), \frac{1}{2}\frac{\ln(u)}{\ln(v)}\Big), \qquad df^{-1}(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\ln(v)}{2u} & \frac{\ln(u)}{2v} \\ \frac{1}{2u\ln(v)} & -\frac{\ln(u)}{2v\ln^2(v)} \end{pmatrix}.$$