Musterlösung 2

1. a)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 e^{x+y}\, dxdy &= \int_0^1 \int_0^1 e^x \underbrace{e^y}_{\text{unabh. von } x} dxdy = \int_0^1 \left(e^y \cdot \int_0^1 e^x\, dx \right) dy \\
&= \int_0^1 e^y \cdot \underbrace{\left(\int_0^1 e^x\, dx \right)}_{\text{unabh. von } y} dy = \left(\int_0^1 e^x\, dx \right) \cdot \left(\int_0^1 e^y\, dy \right) \\
&= \left(e^x \big|_{x=0}^1 \right)^2 = (e-1)^2 \ .
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}\, dxdy &= \int_0^1 \int_0^1 x^2 \underbrace{\frac{1}{1+y^2}}_{\text{unabh. von } x} dxdy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+y^2} \cdot \int_0^1 x^2\, dx \right) dy \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} \cdot \underbrace{\left(\int_0^1 x^2\, dx \right)}_{\text{unabh. von } y} dy \\
&= \left(\int_0^1 x^2\, dx \right) \cdot \left(\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\, dy \right) \\
&= \left(\frac{x^3}{3} \bigg|_{x=0}^1 \right) \cdot \left([\arctan y]\big|_{y=0}^1 \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4} \ = \ \frac{\pi}{12} \ .
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \int_{\sqrt[3]{y}}^y x^2 y^3\, dxdy &= \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} y^3 \right] \bigg|_{x=y^{1/3}}^y dy \\
&= \frac{1}{3} \int_1^2 y^3 \cdot y^3 - y \cdot y^3\, dy \\
&= \frac{1}{3} \int_1^2 y^6 - y^4\, dy = \frac{1}{3} \left[\frac{y^7}{7} - \frac{y^5}{5} \right] \bigg|_{y=1}^2 \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{7}(2^7 - 1) - \frac{1}{5}(2^5 - 1) \right) \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{127}{7} - \frac{31}{5} \right) \ = \ \frac{418}{105} \ .
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

d) Eigentlich ein uneigentliches Integral, da der Integrand $\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}$ bei $(x,y) = (1,1)$ unendlich wird. Wir werden sehen, dass es dennoch konvergiert und das äussere Integral ein eigentliches Integral wird.

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 \frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}\, dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{y\, dx}{\sqrt{1-x^2y^2}} \right) dy \\
&\overset{\substack{u = yx \\ du = y\, dx}}{=} \int_0^1 \left(\int_0^y \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \right) dy \\
&= \int_0^1 [\arcsin u]|_{u=0}^{y}\, dy \\
&= \int_0^1 \arcsin y\, dy \\
&\overset{\substack{y = \sin t \\ dy = \cos t\, dt}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{t}_{\downarrow} \underbrace{\cos t}_{\uparrow}\, dt \\
&= t \sin t|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, dt \\
&= \frac{\pi}{2} + \cos t|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1
\end{aligned}
$$

2. a)

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{x^2}^x xy^2\, dxdy &= \int_0^1 \int_{x^2}^x \underbrace{x}_{\text{unabh. von } y} y^2\, dxdy = \int_0^1 \left(x \cdot \int_{x^2}^x y^2\, dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(x \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{x^2}^{x} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{x^4}{3} - \frac{x^7}{3} \right) dx \\
&= \left(\frac{x^5}{15} - \frac{x^8}{24} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{15} - \frac{1}{24} = \frac{1}{40}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{x^2} xe^y\, dxdy &= \int_0^1 \int_0^{x^2} \underbrace{x}_{\text{unabh. von } y} e^y\, dxdy = \int_0^1 \left(x \cdot \int_0^{x^2} e^y\, dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(x \cdot e^y|_0^{x^2} \right) dx = \int_0^1 \left(xe^{x^2} - x \right) dx \\
&= \int_0^1 xe^{x^2} dx - \int_0^1 x dx \overset{x^2 = t}{=} \frac{1}{2} \int_0^1 e^t dt - \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{2} e^t \Big|_0^1 - \frac{1}{2} = \frac{e}{2} - 1
\end{aligned}
$$

Siehe nächstes Blatt!

c)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2}\int_0^2 \varrho^2\cos\vartheta d\varrho d\vartheta &= \int_0^{\pi/2}\int_0^2 \varrho^2 \underbrace{\cos(\vartheta)}_{\text{unabh. von } \varrho} d\varrho d\vartheta = \int_0^{\pi/2}\left(\cos(\vartheta)\int_0^2 \varrho^2 d\varrho\right)d\vartheta \\
&= \int_0^{\pi/2}\left(\cos(\vartheta)\left.\frac{\varrho^3}{3}\right|_0^2\right)d\vartheta \\
&= \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2}\cos(\vartheta)d\vartheta = \frac{8}{3}\sin(\vartheta)|_0^{\pi/2} = \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_x^{\sqrt{x}}(y+y^3)dxdy &= \int_0^1\left(\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_x^{\sqrt{x}} = \int_0^1\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)dx \\
&= \int_0^1\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{4}\right)dx = \left(\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{12}-\frac{x^5}{20}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{1}{4}-\frac{1}{12}-\frac{1}{20} = \frac{7}{60}
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
\int_1^2\int_0^{y^{3/2}}\frac{x}{y^2}dxdy &= \int_1^2\left(\frac{1}{y^2}\int_0^{y^{3/2}}xdx\right)dy = \int_1^2\left(\frac{1}{y^2}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{y^{3/2}}\right) \\
&= \int_1^2\frac{y}{2}dy = \left.\frac{y^2}{4}\right|_1^2 = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

3. Sei $y_\nu(x) = \sum\limits_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+\nu}}{2^{2m+\nu}m!\Gamma(\nu+m+1)}$. Man kann jeden Summnden der Reihe einzeln differenzieren. Also,

$$y_\nu'(x) = \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m(2m+\nu)x^{2m+\nu-1}}{2^{2m+\nu}m!\Gamma(\nu+m+1)}$$

und auch

$$y_\nu''(x) = \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m(2m+\nu)(2m+\nu-1)x^{2m+\nu-2}}{2^{2m+\nu}m!\Gamma(\nu+m+1)}.$$

Sei $S = x^2y_\nu + xy_\nu + (x^2-\nu^2)y_\nu$. Dann ist

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m((2m+\nu)(2m+\nu-1)+(2m+\nu)-\nu^2)x^{2m+\nu}}{2^{2m+\nu}m!\Gamma(\nu+m+1)} \\
&+ \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+\nu+2}}{2^{2m+\nu}m!\Gamma(\nu+m+1)} \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m(4m^2+4m\nu)x^{2m+\nu}}{2^{2m+\nu}m!\Gamma(\nu+m+1)} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+\nu}}{2^{2n+\nu-2}(n-1)!\Gamma(\nu+n)} \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty}a_m x^{2m+\nu}
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

Die Koeffizienten a_m erfüllen : $a_0 = 0$ und für $m \geq 1$

$$\begin{aligned}
a_m &= (-1)^m \left(\frac{4m^2 + 4m\nu}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu + m + 1)} - \frac{1}{2^{2m+\nu-2}(m-1)! \Gamma(\nu + m)} \right) \\
&\overset{*}{=} (-1)^m \left(\frac{4m^2 + 4m\nu}{2^{2m+\nu} m! (\nu + m) \Gamma(\nu + m)} - \frac{1}{2^{2m+\nu-2}(m-1)! \Gamma(\nu + m)} \right) \\
&= (-1)^m \left(\frac{4m^2 + 4m\nu - 4m(\nu + m)}{2^{2m+\nu} m! (\nu + m) \Gamma(\nu + m)} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$*$ gilt als $\Gamma(\nu + m + 1) = (\nu + m)\Gamma(\nu + m)$.

Siehe nächstes Blatt!

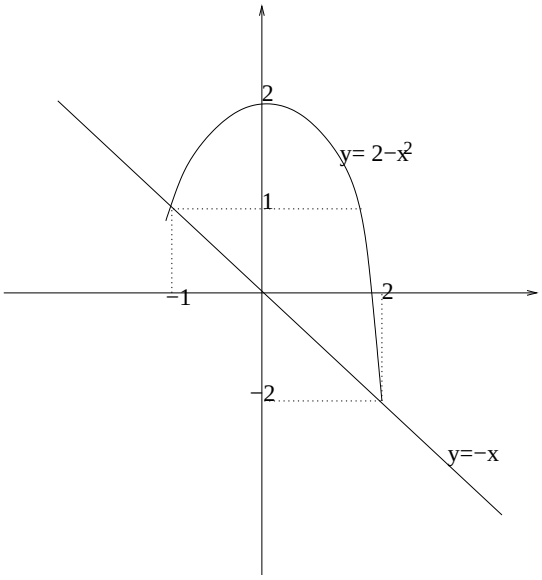

Abbildung 1: Definitionsbereich Frage 1

Online-Abgabe

4. Bei den folgenden Integralen ist die Reihenfolge der Integrationen umzukehren: Die innere Variable soll zur äusseren werden. Wie lautet jeweils das neue Integral?

Frage 1

$$\int_{-1}^{2}\int_{-x}^{2-x^2} f(x,y)dxdy;$$

○ $\int_{-2}^{2}\int_{-y}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dxdy$

○ $\int_{-1}^{2}\int_{-y}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dxdy$

√ ○ $\int_{-2}^{1}\int_{-y}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dxdy + \int_{1}^{2}\int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dxdy$

Der Deffinitionsbereich ist skizziert auf dem Bild 1. Für $y \in [-2,1]$ ist $-x \leq y \leq 2-x^2$. Also wir haben $x \geq -y$ und $x^2 \leq 2-y \Rightarrow x \leq \sqrt{2-y}$. Für $y \geq 1$ wir haben $x^2 \leq 2-y$, also $x \in [-\sqrt{2-y}, \sqrt{2-y}]$.

Bitte wenden!

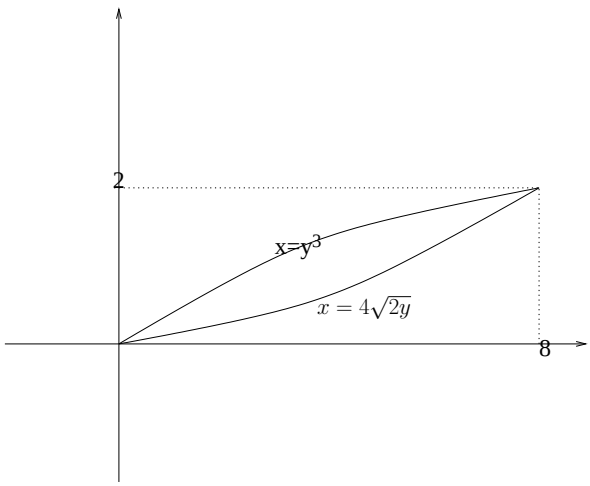

Abbildung 2: Definitionsbereich Frage 2

Frage 2

$$\int_0^2 \int_{y^3}^{4\sqrt{2y}} f(x,y)dxdy;$$

○ $$\int_0^2 \int_{\frac{x^2}{32}}^{\sqrt[3]{x}} f(x,y)dxdy$$

√ ○ $$\int_0^8 \int_{\frac{x^2}{32}}^{\sqrt[3]{x}} f(x,y)dxdy$$

○ $$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^{\frac{x^2}{32}} f(x,y)dxdy$$

Der Deffinitionsbereich ist skizziert auf der Abbildung 2 es befindet sich zwischen Kurven $x = 4\sqrt{2y} \Rightarrow y = \frac{x^2}{32}$ und $x = y^3 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x}$. Als $y^3 \leq x \leq 4\sqrt{2y}$, wir haben $y \leq \sqrt[3]{x}$ und $y \geq \frac{x^2}{32}$.