Lösungen und Korrekturschema

1. (a) FFFW.
   (b) WFFW.
   (c) FWWW.
   (d) FFWF.
   (e) WWWF. In der Tat ist die DFG separierbar und lässt sich wie folgt lösen.

$$\int e^{-x} dx = \int dt$$

$$-e^{-x} = t + C,$$

wobei aus $x(0) = 0$ folgt $C = -1$, also

$$e^{-x} = 1 - t$$

und also

$$x(t) = -\ln(1-t).$$

Korrekturschema (10 Punkte)
Eine Frage wird mit 2 Punkten bewertet wenn alle vier zugehörigen Aussagen korrekt angekreuzt werden, sonst mit 0 Punkten.

2. Das charakteristischen Polynom (1 Pkt.)

$$\alpha^2 + \alpha + 1$$

hat die zwei komplexen Nullkstellen (1 Pkt.)

$$\alpha_{1,2} = -1/2 \pm i\sqrt{3}/2.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (1 Pkt.) ist also gleich

$$y_h(x) = e^{-x/2}(C_1 \cos(\sqrt{3}x/2) + C_2 \sin(\sqrt{3}x/2)).$$

Ansatz für eine partikuläre Lösung der DFG (1 Pkt.):

$$y_p(x) = ax^2 + bx + c.$$

Einsetzen liefert

$$2a + 2ax + b + ax^2 + bx + c - x^2 - x - 1 = 0$$

und Koeffizientenvergleich liefert (1 Pkt.)

$$y_p = x^2 - x.$$

Die allgemeine Lösung der DFG (1 Pkt.) ist also gleich

$$y = e^{-x/2}(C_1 \cos(\sqrt{3}x/2) + C_2 \sin(\sqrt{3}x/2)) + x^2 - x.$$

Korrekturschema (6 Punkte):

Bitte wenden!

- **Part A:** Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung: 3 Punkte.
  - Charkteristischen Polynom richtig: 1 Punkt.
  - Lösungen des charkteristischen Polynom (auch im Fall von falschen Polynom): 1 Punkt.
  - Basis der Lösung (über $\mathbb{C}$ oder über $\mathbb{R}$): 1 Punkt.
  - Bemerkung: here and everywhere errors in copying the text of the exercise on the sheet are only counted 1/2.
- **Part B:** Partikuläre Lösung der Gleichung: 2 Punkte.
  - Polynomial Ansatz (vom Grad $1, 2$ oder 3): 1 Punkt.
  - Berechnung der richtigen Koeffizienten: 1 Punkt.
  - **Variante D:** Variation der Konstanten: 1 Punkt für die richtigen Gleichungen; 1 Punkt für die Lösung.
- **Part C:** Allgemeine Lösung der Gleichung: 1 Punkt für die richtige Lösung, d.h. die Summe der Resultate aus Part A und Part B. This point is awarded only if all the solutions are over $\mathbb{R}$. Adding a line saying that some coefficients must be zero because $\sin(\frac{\sqrt{3}x}{2})$ or $\cos(\frac{\sqrt{3}x}{2})$ are not real functions or any nonsense causes the loss of the point for C.

3. Es gilt:

$$\vec{n} = (0, 0, 1)$$
$$\mathrm{rot}\vec{v} = (\ldots, \ldots, 3)\ .$$

Nach Stokes kriegen wir die Arbeit als

$$A = \int 3dF = 3\pi ab.$$

Bem.: die Fläche der Ellypse muss nicht explizit ausgerechnet werden.
Korrekturschema (6 Punkte): s. Anhang

4. Es gilt:

$$f'(x) = \cos(\pi x^2),\ \ f''(x) = -2\pi x \sin(\pi x^2),\ \ f'''(x) = -2\pi \sin(\pi x^2) - 4\pi^2 x^2 \cos(\pi x^2).$$

Also

$$a_0 = 0,\ \ a_1 = -1,\ \ a_2 = f''(1)/2 = 0,\ \ a_3 = f'''(1)/3{=}2\pi^2/3$$

und

$$P_3(x) = -(x-1) + \frac{2}{3}\pi^2(x-1)^3.$$

Korrekturschema (6 Punkte):

- Lösung 1:
  - $f(1) = \int_1^1 \cdots = 0$: 1 Pkt.
  - $f'(t) = \cos(\pi t^2)$: 1 Pkt. (ohne Hauptsatz: 0 Pkte).
  - $f''(t) = -2\pi t \sin(\pi t^2)$: 0.5 Pkte.
  - $f'''(t) = -2\pi \sin(\pi t^2) - 4\pi^2 t^2 \cos(\pi t^2)$: 1 Pkt.
  - $f'(1) = -1$: 0.5 Pkt.
  - $f''(1) = 0$: 0.5 Pkt.
  - $f'''(1) = 4\pi^2$: 0.5 Pkt.
  - $P_{3,f}(x) = 0 - (x-1) + \frac{0}{2}(x-1)^2 + \frac{4\pi^2}{6}(x-1)^3$: 1 Pkt.
  - Kettenregel, Produktregel vergessen: -0.5 Pkte.

Siehe nächstes Blatt!

- $\frac{f'''(1)}{6}(x-1)^3$: -0.5 Pkte.

  – Taylorpolynom falschen Grades oder nur $\frac{f'''(1)}{6}(x-1)^3$: -0.5 Pkte.

- Lösung 2:
  - $g(t) = \cos(\pi t^2)$
  - $g'(t) = -2\pi t \sin(\pi t^2)$: 0.5 Pkte.
  - $g''(t) = -2\pi \sin(\pi t^2) - 4\pi^2 t^2 \cos(\pi t^2)$: 1 Pkt.
  - $g(1) = -1$: 0.5 Pkt.
  - $g'(1) = 0$: 0.5 Pkt.
  - $g''(1) = 4\pi^2$: 0.5 Pkt.
  - $P_{3,g} = -1 + 0(x-1) + \frac{4\pi^2}{2}(x-1)^2$: 1 Pkt.
  - $P_{3,f} \overset{1Punkt}{=} \int_1^x P_{3,g}(t)dt \overset{1Punkt}{=} -(x-1) + \frac{4\pi^2}{6}(x-1)^3$: 2 Pkte.
  - Kettenregel, Produktregel vergessen: -0.5 Pkte.
  - Taylorpolynom falschen Grades oder nur $\frac{f'''(1)}{6}(x-1)^3$: -0.5 Pkte.

5. Aus Symmetriegründen oder durch Einsetzen bekommen wir $x_0 = 0$.
   Da $\sinh(1/a) = 1$, rechnen wir a als

$$a = \frac{1}{Arsinh(1)} = \frac{1}{\ln(1+\sqrt{2})}$$

   aus. (Sonst: Sei $z = e^{1/a}(> 0)$, dann ist $z - z^{-1} = 2$. Aus $z^2 - 2z - 1 = 0$ folgt $z = 1 + \sqrt{2}$ und $a = 1/\ln(1+\sqrt{2})$.)

   Ausserdem gilt $x_0 = 0$. Die Länge der Seil ist also gleich

$$L = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \sinh^2((x-x_0)/a)}dx = 2\int_0^1 \cosh(x/a)dx$$

$$= 2a\sinh(1/a) = 2/\ln(1+\sqrt{2})(= 2/\mathrm{Arsinh}(1)).$$

   Korrekturschema (6 Punkte): s. Anhang

6. a) Eine Parametrisierung der Fläche ist durch

$$\vec{r}(t,\varphi) = (t\cos(\varphi), t\sin(\varphi), L\varphi)$$

   gegeben, für $t, \varphi \in \mathbb{R}$.

   b) Da

$$\vec{r}_t = (\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0)$$
$$\vec{r}_\varphi = (-t\sin(\varphi), t\cos(\varphi), L),$$

   so ist

$$\vec{r}_t \times \vec{r}_\varphi = (L\sin\varphi, -L\cos\varphi, t)$$

   und

$$dF = \sqrt{L^2 + t^2}dtd\varphi.$$

   Der Flächeninhalt ist also gleich

$$A = \int_0^\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{L^2+t^2}dtd\varphi$$

$$= \pi\left[\frac{1}{2}t\sqrt{L^2+t^2} + \frac{1}{2}L^2\ln(t + \sqrt{L^2+t^2})\right]_{-a}^{a}$$

Bitte wenden!

$$= \pi \left(a\sqrt{L^2+a^2} + L^2 \ln \left(\frac{a+\sqrt{L^2+a^2}}{L} \right) \right)$$

$$= \pi \left(a\sqrt{L^2+a^2} + L^2 \text{Arsinh}\frac{a}{L} \right).$$

Korrekturschema (6 Punkte): s. Anhang

7. • 1 Lösung: Die Funktion $u(x) = \cos(x)y(x)$ erfüllt

$$u'(x) = \cos(x)y'(x) - \sin(x)y(x)$$

und nach einsetzen in der DFG

$$u' = -u^2, u(0) = 1.$$

Eine Separation liefert

$$\int \frac{du}{u^2} = -\int dx$$

und also

$$u(x) = \frac{1}{x+C},$$

wobei (aus $u(0) = 1$) $C = 1$ ist. Eine Rücksubstitution liefert

$$y(x) = \frac{1}{\cos(x)(x+1)}.$$

Korrekturschema (6 Punkte):

– Gleichung in u: 2 Punkte
($u'(x) = \cos(x)y'(x) - \sin(x)y(x)$: $1 = 1_A$ Pkt, das Resultat für u' richtig Einsetzen in einer Gleichung in u: $1 = 1_B$ Pkt).
– Lösung der DFG in u: 2 Punkte
($1 = 1_C$ Pkt. für die Methode der Sebaration der Variablen, $1 = 1_D$ Pkt. für die richtige Integration)
– Ausrechnung der Konstante bei richtig Einsetzen der Anfangsbedingung: $1 = 1_{E_1} = 1_{E_2}$ Punkt.
– Rücksubstitution: $1 = 1_{F_1} = 1_{F_2}$ Punkt.
– Im Fall von 2 möglichen Lösungswege bekommt man Punkte nur für eine Version.
– Variante für die Lösung von $u' + u^2 = 0$: Sei $w = \frac{1}{u}$, dann $\frac{dw}{du} = \frac{-1}{u^2} = \frac{1}{u'} = \frac{dx}{du}$. Durch Separation der Variable ($1 = 1_C$ Pkt.) kriegen wir $w(x) = x + C$ und also $u(x) = \frac{1}{x+C}$ ($1 = 1_D$ Pkt.).

• 2 Lösung: Sei $u = \frac{1}{y}$. Dann ist $u' = \frac{-y'}{y^2}$ und also

$$y' = -\frac{u'}{u}.$$

Beim einsetzen kriegen wir

$$-\frac{u'}{u} = \frac{1}{u}\tan(x) - \frac{1}{u^2}\cos(x)$$

oder auch

$$u' + \tan(x)u = \cos(x).$$

Siehe nächstes Blatt!

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $u' + \tan(x)u = 0$ ist nach einer Separation der Variablen gleich

$$u_h(x) = C\cos(x), C \in \mathbb{R}.$$

Eine partikuläre Lösung kriegen wir beim Ausprobieren oder mit einer Variation der Konstante und ist gleich

$$u_p(x) = x\cos(x).$$

Es folgt, dass

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) = \cos(x)(x + C)$$

und also

$$y(x) = \frac{1}{\cos(x)(x + C)}.$$

Da $y(0) = 1$ folgt $C = 1$ und

$$y(x) = \frac{1}{\cos(x)(x + 1)}.$$

Korrekturschema (6 Punkte):

- Gleichung in u: 2 Punkte
- Lösung der DFG in u: 2 Punkte
- Ausrechnung der Konstante bei richtig Einsetzen der Anfangsbedingung: 1 Punkt
- Rücksubstitution: 1 Punkt.
- Im Fall von 2 möglichen Lösungswege bekommt man Punkte nur für eine Version.

8. Sei $f(\varphi) = \sqrt{1 + \cos(5\varphi)}$. Dann:

$$F = \int_0^{2\pi} \int_0^{f(\varphi)} \varrho d\varrho d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos(5\varphi))d\varphi = \pi.$$

$$J_0 = \int_0^{2\pi} \int_0^{f(\varphi)} \varrho^3 d\varrho d\varphi = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} f(\varphi)^4 d\varphi = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (1 + \cos(5\varphi))^2 d\varphi = 3\pi/4.$$

Korrekturschema (6 Punkte): s. Anhang

9. Die allgemeine Lösung von

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x}{x}$$

ist gleich

$$y(x) = \ln(x) - x + C.$$

Insbesondere gilt die Gleichung für $x(0) = x_0, y(0) = y_0$. Deswegen ist

$$C = y_0 - \ln(x_0) + x_0,$$

und also

$$y(x) = \ln(x/x_0) - x + x_0 + y_0.$$

Für unsere Anfangsbedingungen gilt also

$$y(x) = \ln(2x) - x + 3/2,$$

Diese Lösung wird bei $x = 1$ maximal, mit Maximum $y(1) = 1/2 + \ln 2$.
Korrekturschema (6 Punkte): s. Anhang

Bitte wenden!

10. Wählen wir Zylinderkoordinaten bez. der x-Achse:

$$x = x, y = \varrho \cos \varphi, z = \varrho \sin \varphi,$$

mit Volumenelement $dV = \varrho dx d\varrho d\varphi$. Der Trägheitsmoment Θ_z ist gleich

$$\Theta_z = d \int_K (x^2 + y^2) dV = d \int_{-1}^{1} \int_0^{\sqrt{1-|x|}} \int_0^{2\pi} (x^2 + \varrho^2 \cos^2 \varphi) \varrho d\varphi d\varrho dx =$$

$$= d\pi \int_{-1}^{1} \int_0^{\sqrt{1-|x|}} (2x^2 + \varrho^2) \varrho d\varrho = d\pi \int_{-1}^{1} [x^2 \varrho^2 + \varrho^4/4]_0^{\sqrt{1-|x|}} = d\pi \int_{-1}^{1} (x^2(1-|x|) + (1-|x|)^2/4) dx$$

$$= d2\pi \int_0^1 (x^2(1-x) + (1-x)^2/4) dx = d\pi/3.$$

Korrekturschema (6 Punkte): s. Anhang

Korrektur und Gegenkorrektur:

1. Korrektur: Fausta, Gegenkorrektur: Beatrice
2. Korrektur: Beatrice, Gegenkorrektur:Beverly
3. Korrektur: Roland, Gegenkorrektur: Fausta
4. Korrektur: Beverly, Gegenkorrektur: Fausta
5. Korrektur: Jacob, Gegenkorrektur: Felix
6. Korrektur: Georg, Gegenkorrektur: Beatrice
7. Korrektur: Fausta, Gegenkorrektur: Jacob
8. Korrektur: Felix, Gegenkorrektur: Georg
9. Korrektur: Jacob, Gegenkorrektur:Beverly
10. Korrektur: Roland, Gegenkorrektur: Felix.