Musterlösungen Schnellübung 2

1. Mit der (etwas missbräuchlichen) Notation $g = g(x, y)$, $\phi = \phi\big(x + \psi(y)\big)$, $\psi = \psi(y)$ haben wir

$$g_x = \phi' \cdot 1 = \phi' , \quad g_y = \phi' \cdot \psi' , \quad g_{xx} = \phi'' \cdot 1 = \phi'' , \quad g_{xy} = \phi'' \cdot \psi'.$$

Somit ist

$$g_x \cdot g_{xy} = \phi' \cdot \phi'' \cdot \psi' = \phi' \cdot \psi' \cdot \phi'' = g_y \cdot g_{xx} \,.$$

2. In Kugelkoordinaten (r, ϕ, ϑ) ergibt sich mit $dV = r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\phi \, d\vartheta$ das gesuchte Integral I.

$$I = \int_0^{2\pi} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \int_0^1 (r\cos\vartheta)^\alpha r^\beta r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta}_{\text{unabhängig von } \phi} \, d\phi = 2\pi \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^{\alpha+\beta+2} (\cos\vartheta)^\alpha \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/2} (\cos\vartheta)^\alpha \sin\vartheta \left[\frac{r^{\alpha+\beta+3}}{(\alpha+\beta+3)} \right]_0^1 d\vartheta = \frac{2\pi}{(\alpha+\beta+3)} \int_0^{\pi/2} (\cos\vartheta)^\alpha \sin\vartheta \, d\vartheta$$

$$= \frac{2\pi}{(\alpha+\beta+3)} \left[-\frac{(\cos\vartheta)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_0^{\pi/2} = \frac{2\pi}{(\alpha+1)(\alpha+\beta+3)}$$

3. a) 1. Methode: Setzen wir $f(t) := te^{-t}$ $(t \geq 0)$. Es gilt: $f(0) = 0$ und $f(t) > 0$.

$$f'(t) = (1-t)e^{-t} = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Da $f''(1) < 0$ ist $t = 1$ eine Maximalstelle von f. Wegen $z(x, y) = f(x)f(y)$ ist der gesuchte Punkt

$$(x, y, z) = (1, 1, e^{-2}).$$

2. Methode: Betrachten wir die Funktion

$$F(x, y) = xye^{-(x+y)}$$

für $x \geq 0, y \geq 0$. Ein höchste Punkt der durch

$$z = F(x, y)$$

Bitte wenden!

gegebenen Fläche ist eine globale Maximalstelle der Funktion F auf dem Bereich $D = \{(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0\}$. Es ist $F(x,y) \geq 0$ auf D, und $F(x,y) = 0$ auf dem Rand von D. Deswegen wird nur das Inneren von D betrachtet, d.h. der Bereich $\{(x,y) \mid x > 0,\ y > 0\}$. Dort sind die Lösungen der Gleichung

$$\operatorname{grad} F(x,y) = 0$$

die gesuchten Kandidaten. Auf $\{(x,y) \mid x > 0,\ y > 0\}$ ist die einzige Lösung von

$$\operatorname{grad} F(x,y) = \begin{pmatrix} (1-x)ye^{-(x+y)} \\ (1-y)xe^{-(x+y)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

durch $(x,y) = (1,1)$ gegeben. Da die Hesse Matrix

$$H_F(1,1) = \begin{pmatrix} F_{xx}(x,y) & F_{yx}(x,y) \\ F_{xy}(x,y) & F_{yy}(x,y) \end{pmatrix}_{(x,y)=(1,1)} = e^{-2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

von F im Punkt $(1,1)$ negativ definit ist (da zum Beispiel sie einen negativen doppelten Eigenwert $\lambda = -1$ hat), ist $(1,1)$ die gesuchte globale Maximalstelle und

$$(x,y,z) = (1,1,e^{-2})$$

der gesuchte Maximum.

b)

$$V = \int_0^\infty \int_0^\infty f(x)f(y)dxdy = \left(\int_0^\infty f(t)dt\right)^2 = \left(\int_0^\infty te^{-t}dt\right)^2.$$

Mit partieller Integration erhält man

$$V = \left([t(-e^{-t})]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t}dt\right)^2 = 1.$$

4. i) Sei $\frac{\partial v_i}{\partial x} =: \partial_x v_i$. Es gilt:

$$\operatorname{div}\,(\operatorname{rot}\,\vec{v}) = \operatorname{div} \begin{pmatrix} \partial_y v_3 - \partial_z v_2 \\ \partial_z v_1 - \partial_x v_3 \\ \partial_x v_2 - \partial_y v_1 \end{pmatrix} =$$

$$\partial_x(\partial_y v_3 - \partial_z v_2) + \partial_y(\partial_z v_1 - \partial_x v_3) + \partial_z(\partial_x v_2 - \partial_y v_1) =$$

$$\frac{\partial^2 v_3}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial y \partial z} = 0.$$

ii) $\operatorname{div}\,(grad\, f) = \operatorname{div} \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix} = \partial_x(\partial_x f) + \partial_y(\partial_y f) + \partial_z(\partial_z f) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}.$

Siehe nächstes Blatt!

iii)

$$\text{rot rot } \vec{v} = \text{rot} \begin{pmatrix} \partial_y v_3 - \partial_z v_2 \\ \partial_z v_1 - \partial_x v_3 \\ \partial_x v_2 - \partial_y v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y(\partial_x v_2 - \partial_y v_1) - \partial_z(\partial_z v_1 - \partial_x v_3) \\ \partial_z(\partial_y v_3 - \partial_z v_2) - \partial_x(\partial_x v_2 - \partial_y v_1) \\ \partial_x(\partial_z v_1 - \partial_x v_3) - \partial_y(\partial_y v_3 - \partial_z v_2) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \partial_y\partial_x v_2 - \partial_y\partial_y v_1 - \partial_z\partial_z v_1 - \partial_z\partial_x v_3 + (\partial_x\partial_x v_1 - \partial_x\partial_x v_1) \\ \partial_z\partial_y v_3 - \partial_z\partial_z v_2 - \partial_x\partial_x v_2 - \partial_x\partial_y v_1 + (\partial_y\partial_y v_2 - \partial_y\partial_y v_2) \\ \partial_x\partial_z v_1 - \partial_x\partial_x v_3 - \partial_y\partial_y v_3 - \partial_y\partial_z v_2 + (\partial_z\partial_z v_3 - \partial_z\partial_z v_3) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \partial_x(\partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3) \\ \partial_y(\partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3) \\ \partial_z(\partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \partial_x\partial_x v_1 + \partial_y\partial_y v_1 + \partial_z\partial_z v_1) \\ \partial_x\partial_x v_2 + \partial_y\partial_y v_2 + \partial_z\partial_z v_2) \\ \partial_x\partial_x v_3 + \partial_y\partial_y v_3 + \partial_z\partial_z v_3) \end{pmatrix} =$$

$$= grad\ div\ \vec{v} - \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{pmatrix}.$$