Musterlösungen Serie 1

1. Frage 1

Wie lautet der Gradient der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2y + y$?

○ $\triangledown f(x, y) = x^2 + 2xy + 1.$

√ ○ $\triangledown f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 + 1 \end{pmatrix}$

○ $\triangledown f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + 1 \\ 2xy \end{pmatrix}$

Der Gradient von f ist definiert als $\begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}$. Ausrechnen ergibt Antwort (b).

Frage 2

Gegeben ist die Funktion $f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

○ Die nichtleeren Niveauflächen von f sind Oberflächen von Kugeln mit Mittelpunkt O oder die Menge $\{(0, 0, 0)\}$.

○ Die nichtleeren Niveauflächen von f sind Ebenen senkrecht zum Vektor $(1, 3, 1)$.

√ ○ Die nichtleeren Niveauflächen von f sind Oberflächen von Ellipsoiden mit Mittelpunkt O oder die Menge $\{(0, 0, 0)\}$.

Die Niveaufläche von f zum Niveau C ist die Menge

$$N_C(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | f(x, y, z) = C\}.$$

Für $C \in \mathbb{R}^+_*$ ist also ein Ellipsoid mit Mittelpunkt O, für $C = 0$ ist die Menge $\{(0, 0, 0)\}$, und sonst ist die leere Menge.

Bitte wenden!

Frage 3

Der Wert einer Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ fällt am schnellsten in die Richtung

○ der minimalen partiellen Ableitung.

○ entgegengesetzt zur maximalen partiellen Ableitung.

○ des Gradienten.

√ ○ entgegengesetzt zum Gradienten.

○ orthogonal zum Gradienten.

Die Frage ist äquivalent dazu, für welchen Einheitsvektor e die Richtungsableitung $D_e f$ am kleinsten, das heisst, am meisten negativ ist. Die Richtungsableitung ist aber gleich $(\nabla f) \cdot e$, und dies wird am kleinsten für $e = -\nabla f \,/\, |\nabla f|$. Die richtige Antwort lautet daher (d).

Frage 4

Bestimmen Sie die Richtungsableitung der Funktion $f(x, y, z) = x^2 + y + z^3$ an der Stelle $(1, 2, 2)$ in Richtung des Vektors $(4, 4, 2)$.

○ $\dfrac{34}{3}$

○ 36

√ ○ 6

○ $(2, 1, 12)$

○ $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 4)$

Der Betrag des Vektors $(4, 4, 2)$ ist $\sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{36} = 6$; der zugehörige Einheitsvektor ist daher $e := (4, 4, 2)/6 = (2, 2, 1)/3$. Der Gradient $\nabla f(x, y, z) = (2x, 1, 3z^2)$ hat im Punkt $(1, 2, 2)$ den Wert $(2, 1, 12)$. Somit ist die fragliche Richtungsableitung $D_e f(1, 2, 2) = (2, 1, 12) \cdot (2, 2, 1)/3 = (2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 12 \cdot 1)/3 = 6$. Also ist (c) die richtige Antwort.

Siehe nächstes Blatt!

Frage 5

Für je zwei partiell differenzierbare Funktionen $f,\ g:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gilt

○ $\nabla(fg) = \nabla f \cdot \nabla g$.

√ ○ $\nabla(fg) = \nabla f \cdot g + f \cdot \nabla g$.

Antwort (b) ist richtig, denn ausgeschrieben ist sie die Gleichung von Vektoren

$$\left(\frac{\partial(fg)}{\partial x_i} \right)_{i=1}^{3} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)_{i=1}^{3}$$

welche koeffizientenweise gerade auf die Leibnizsche Produktregel für die Ableitung nach einer Variablen hinausläuft. Aussage (a) ergibt schon deshalb keinen Sinn, weil auf der rechten Seite ein Produkt von Vektoren steht, das nicht wieder als Vektor im $\mathbb{R}^3$ interpretiert werden kann.

Bitte wenden!

Frage 6

Der Zustand eines Gases wird durch die Grössen Druck p, Volumen V und (absolute) Temperatur T beschrieben, welche unterreinander durch eine Zustandsgleichung des Gases

$$F(p, V, T) = 0$$

verbunden sind.[1] Die Zustandgleichung sagt, dass für eine feste Menge von Gas je zwei der drei Grössen p, V, T die dritte festlegen. Man hat folglich Funktionen

$$p : (V, T) \to p(V, T)$$

$$V : (p, T) \to V(p, T)$$

$$T : (p, V) \to T(p, V),$$

welche aus der Zustandgleichung folgen. In der Physik definiert man dann den Ausdehnungskoeffizient α des Gases durch

$$\alpha = \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial T},$$

den Spannungskoeffizient β durch

$$\beta = \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial T},$$

und die Kompressibilitäts $\varkappa$ durch

$$\varkappa = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}.$$

Eine (nicht von der Zustandsgleichung abhängige) Beziehung zwischen den Koeffizienten $\alpha, \beta, \varkappa$ ist gegeben durch

- ○ $\alpha\beta = T\varkappa$
- ○ $\alpha = -p\varkappa\beta$
- √ ○ $\alpha = p\varkappa\beta$

Betrachten wir die Funktion

$$V : (p, T) \to V(p, T).$$

Wenn wir V konstant $V = C$ halten, ist der Druck p nur von T abhängig, d.h. wir kriegen eine Funktion in einer Variable

$$p : T \to p(C, T),$$

die wir mit $\tilde{p} : T \to \tilde{p}(T)$ nennen. Dann haben wir

$$V(\tilde{p}(T), T) = C,$$

[1] Es gibt verschiedene Zustandglaichungen. Die einfachste ist die des idealen Gases

$$pV = RT,$$

wobei R eine Gaskonstante ist (also $F(p, V, T) = pV - RT$). In komplizierteren Fälle ist die van der Waal'sche Zustandgleichung

$$(p + \frac{a}{V^2})(V - b) = RT,$$

für Gaskonstanten a, b, die das Verhalten realer Gase genauer beschreibt (also $F(p, V, T) = (p + \frac{a}{V^2})(V - b) - RT$).

Siehe nächstes Blatt!

die auch als Parameterdarstellung der Niveaulinie der Funktion $V(p,T)$ zum Niveau C gesehen wird. Mit Hilfe der verallgemeinerten Kettenregel folgt aus dieser Glaichung, dass

$$\frac{\partial V}{\partial p}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial T} + \frac{\partial V}{\partial T}\cdot 1 = 0.$$

Aber $\frac{\partial \tilde{p}}{\partial T} = \frac{\partial p}{\partial T}$, da $\tilde{p}(T) = p(C,T)$, und daher

$$\frac{\partial V}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial T} + \frac{\partial V}{\partial T}\cdot 1 = 0.$$

Nach Definition unseren Koeffizienten kriegen wir

$$-V\varkappa \cdot p\beta + V\alpha = 0,$$

und daher

$$\alpha = p\varkappa\beta.$$

Bemerkung: Die gewünschte Beziehung wird aus der Existenz einer Zustandgleichung hergeleitert. Die spezielle Form der Zustandgleichung spielt aber dabei keine Rolle.

2. Wir suchen die Punkte auf dem Ellipsoid, bei denen der Gradient parallel zum Normalenvektor $(1,1,1)$ der Ebene ist. Setzen wir

$$f(x,y,z) := 2x^2 + 2y^2 + \frac{z^2}{4},$$

so müssen wir also

$$\mathbf{grad}\ f = \Big(4x, 4y, \frac{z}{2}\Big) = a\,(1,1,1)$$

mit einer reellen Zahl a verlangen. Es folgt, dass

$$x = y = \frac{a}{4}\ ,\ z = 2a$$

ist. Einsetzen in die Gleichung des Ellipsoiden führt dann zu

$$1 = f(x,y,z) = \frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{8} + a^2 = \frac{5}{4}\,a^2 \quad\Longrightarrow\quad a_\pm = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Die gesuchten Tangentialebenen müssen die Gleichung $x+y+z = b$ mit $b \in \mathbb{R}$ erfüllen, damit sie parallel zur Ebene $x+y+z=1$ sind. Da sie die Punkte

$$(x,y,z) = \Big(\frac{a_+}{4}, \frac{a_+}{4}, 2a_+\Big) = \Big(\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\Big)$$

bzw.

$$(x,y,z) = \Big(\frac{a_-}{4}, \frac{a_-}{4}, 2a_-\Big) = \Big(-\frac{1}{2\sqrt{5}}, -\frac{1}{2\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}\Big)$$

enthalten müssen, finden wir durch Einsetzen die Werte $b_\pm = \pm\sqrt{5}$. Die Tangentialebenen sind also

$$x+y+z = \sqrt{5} \quad \text{und} \quad x+y+z = -\sqrt{5}.$$

3. Sei

$$F(x,y) := y\,f\big(\frac{x}{y}\big).$$

Dann gilt

$$F_x(x,y) = f'\big(\frac{x}{y}\big) \quad , \quad F_y(x,y) = f\big(\frac{x}{y}\big) - \frac{x}{y}f'\big(\frac{x}{y}\big).$$

Bitte wenden!

Die Tangentialebene im Punkte $(x_0, y_0, F(x_0, y_0))$ (mit $y_0 \neq 0$) ist

$$\begin{aligned}
z &= F(x_0, y_0) + F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\
&= y_0 f\big(\frac{x_0}{y_0}\big) + f'\big(\frac{x_0}{y_0}\big)(x - x_0) + \left[f\big(\frac{x_0}{y_0}\big) - \frac{x_0}{y_0} f'\big(\frac{x_0}{y_0}\big)\right](y - y_0) \\
&= x f'\big(\frac{x_0}{y_0}\big) + y\left[f\big(\frac{x_0}{y_0}\big) - \frac{x_0}{y_0} f'\big(\frac{x_0}{y_0}\big)\right] \\
&\quad + \underbrace{y_0 f\Big(\frac{x_0}{y_0}\Big) - x_0 f'\Big(\frac{x_0}{y_0}\Big) - y_0\left[f\big(\frac{x_0}{y_0}\big) - \frac{x_0}{y_0} f'\big(\frac{x_0}{y_0}\big)\right]}_{=0} \\
&= x f'\big(\frac{x_0}{y_0}\big) + y\left[f\big(\frac{x_0}{y_0}\big) - \frac{x_0}{y_0} f'\big(\frac{x_0}{y_0}\big)\right].
\end{aligned}$$

Also liegt (0,0,0) auf diesen Tangentialebenen, d. h. alle Tangentialebenen gehen durch den Nullpunkt.

4. Durch quadratisches Ergänzen finden wir

$$f(x, y) := x^2 + y^2 + 4x + 2y = (x + 2)^2 + (y + 1)^2 - 5.$$

Also ist sofort klar, dass der Punkt $(-2, -1)$ (der innerhalb der Kreisscheibe liegt) die globale Minimalstelle ist. (Diesen Punkt erhalten wir auch durch das „Standardrezept“, nämlich das Nullsetzen der partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned}
0 = f_x = 2x + 4 \quad &\Longrightarrow \quad x = -2 \\
0 = f_y = 2y + 2 \quad &\Longrightarrow \quad y = -1.)
\end{aligned}$$

Das globale Minimum ist $f(-2, -1) = -5$. Es folgt auch, dass der globale Maximum auf dem Rand liegt, denn im Innern des Kreises sind die partiellen Ableitungen überall definiert und nur bei dem einen oben gefundenen Punkt beide gleich null.

Den Rand der Kreisscheibe parametrisieren wir wie folgt:

$$\begin{cases} x = 3\,\cos\phi \\ y = 3\,\sin\phi \end{cases} \qquad \text{mit } 0 \leq \phi \leq 2\pi.$$

Also ist

$$f(x(\phi), y(\phi)) = 9 + 12\cos\phi + 6\sin\phi.$$

Nullsetzen der Ableitung ergibt

$$0 = \frac{d}{d\phi} f(x(\phi), y(\phi)) = -12\sin\phi + 6\cos\phi \quad \Longleftrightarrow \quad \tan\phi = \frac{1}{2}.$$

Dies ist erfüllt für $\phi = \phi_1 := \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ oder $\phi = \phi_2 := \pi + \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$. Einsetzen dieser beiden

Siehe nächstes Blatt!

Werte ergibt

$$\begin{aligned}
f(x(\phi_1), y(\phi_1)) &= 9 + 12\cos\arctan\frac{1}{2} + 6\sin\arctan\frac{1}{2} \\
&= 9 + 12\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} + 6\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = 9 + 12\frac{2}{\sqrt{5}} + 6\frac{1}{\sqrt{5}} \\
&= 9 + 6\sqrt{5}, \\
f(x(\phi_2), y(\phi_2)) &= 9 + 12\cos\left(\pi + \arctan\frac{1}{2}\right) + 6\sin\left(\pi + \arctan\frac{1}{2}\right) \\
&= 9 - 12\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} - 6\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = 9 - 6\sqrt{5}.
\end{aligned}$$

Das globale Maximum liegt also bei

$$(x, y) = (3\cos\phi_1, 3\sin\phi_1) = \left(3\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}, 3\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}\right) = \left(\frac{6}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$$

und hat den Wert $9 + 6\sqrt{5}$.

Bemerkung: An den Randstellen des Intervalles $[0, 2\pi]$ kann kein Maximum der Funktion $\phi \mapsto f(x(\phi), y(\phi))$ liegen. (Im allgemeinen Falle müsste man ja darauf achten.) Denn man kann sich diese Funktion auch für jedes $\phi \in \mathbb{R}$ definiert denken. Diese „auf $\mathbb{R}$ fortgesetzte“ Funktion ist 2π-periodisch: $f(x(\phi + 2\pi k), y(\phi + 2\pi k)) = f(x(\phi), y(\phi))$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$. Für diese fortgesetzte Funktion liegen $\phi = 0$ und $\phi = 2\pi$ *nicht* am Rand des Definitionsbereiches, und an diesen beiden Stellen ist die Ableitung ungleich null.