Musterlösungen Serie 2

1. **Frage 1**

Für eine Funktion $f : (x, y) \to f(x, y)$ ist der Laplace-Operator Δ als

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$$

definiert. Für Polarkoordinaten (ϱ, φ) setzen wir

$$\tilde{f}(\varrho, \varphi) = f(x(\varrho, \varphi), y(\varrho, \varphi)).$$

Wie stellt sich der Laplace-Operator in Polarkoordinaten dar?

○ $\Delta f = \tilde{f}_{\varrho\varrho} + \tilde{f}_{\varphi\varphi}$

√ ○ $\Delta f = \tilde{f}_{\varrho\varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\tilde{f}_{\varphi\varphi} + \frac{1}{\varrho}\tilde{f}_{\varrho}$

○ $\Delta f = \tilde{f}_{\varrho\varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\tilde{f}_{\varphi\varphi}$

Betrachten wir Polarkoordinaten (ϱ, φ) mit

$$x(\varrho, \varphi) = \varrho\cos(\varphi), \;\; y(\varrho, \varphi) = \varrho\sin(\varphi).$$

und

$$\varrho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \;\; \varphi(x, y) = \begin{cases} arctan(\frac{y}{x}), & x > 0 \\ arctan(\frac{y}{x}) + \pi, & x < 0. \end{cases}$$

Mit Hilfe der verallgemeinerten Kettenregel kriegen wir

$$f_x = \tilde{f}_\varrho \cdot \varrho_x + \tilde{f}_\varphi \cdot \varphi_x$$

$$f_y = \tilde{f}_\varrho \cdot \varrho_y + \tilde{f}_\varphi \cdot \varphi_y.$$

Mit der Produktregel und nochmals die Kettenregel bekommen wir

$$f_{xx} = (\tilde{f}_{\varrho\varrho}\varrho_x + \tilde{f}_{\varrho\varphi} \cdot \varphi_x))\varrho_x + \tilde{f}_\varrho \cdot \varrho_{xx} + (\tilde{f}_{\varphi\varrho}\varrho_x + \tilde{f}_{\varphi\varphi} \cdot \varphi_x))\varphi_x + \tilde{f}_\varphi \cdot \varphi_{xx}$$

$$f_{yy} = (\tilde{f}_{\varrho\varrho}\varrho_y + \tilde{f}_{\varrho\varphi} \cdot \varphi_y))\varrho_y + \tilde{f}_\varrho \cdot \varrho_{yy} + (\tilde{f}_{\varphi\varrho}\varrho_y + \tilde{f}_{\varphi\varphi} \cdot \varphi_y))\varphi_y + \tilde{f}_\varphi \cdot \varphi_{yy}.$$

Also

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = \tilde{f}_{\varrho\varrho}(\varrho_x^2 + \varrho_y^2) + 2\tilde{f}_{\varrho\varphi}(\varrho_x\varphi_x + \varrho_y\varphi_y) + \tilde{f}_{\varphi\varphi}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) + \tilde{f}_\varrho(\varrho_{xx} + \varrho_{yy}) + \tilde{f}_\varphi(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}),$$

wobei

$$\varrho_x = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos(\varphi)$$

$$\varrho_y = \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin(\varphi).$$

Um φ_x und φ_y zu berechnen, differenzieren wir die Gleichung

$$x = \varrho(x, y)\cos(\varphi(x, y))$$

partiell nach x. Es folgt

$$1 = \varrho_x\cos(\varphi) - \varrho\sin(\varphi)\varphi_x$$

$$\varphi_x = \frac{\varrho_x\cos(\varphi) - 1}{\varrho\sin(\varphi)} \overset{(\varrho_x = \cos(\varphi))}{=} \frac{\cos^2(\varphi) - 1}{\varrho\sin(\varphi)} = \frac{-\sin^2(\varphi)}{\varrho\sin(\varphi)} = -\frac{\sin(\varphi)}{\varrho}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Analog kriegen wir $\varphi_y = \frac{\cos(\varphi)}{\varrho}$. Daher

$$\varrho_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\cos(\varphi) = -\sin(\varphi)\varphi_x = \frac{\sin^2(\varphi)}{\varrho}$$

$$\varrho_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\sin(\varphi) = \cos(\varphi)\varphi_y = \frac{\cos^2(\varphi)}{\varrho}$$

$$\varphi_{xx} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\sin(\varphi)}{\varrho} = -\frac{\cos(\varphi)\varphi_x\varrho - \sin(\varphi)\varrho_x}{\varrho^2} = -\frac{\cos(\varphi)\varrho(-\frac{\sin(\varphi)}{\varrho}) - \sin(\varphi)\cos(\varphi)}{\varrho^2} = \frac{2\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{\varrho^2}$$

$$\varphi_{yy} = \cdots = -\frac{2\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{\varrho^2}.$$

Durch Einsetzen kriegen wir

$$\Delta f = \tilde{f}_{\varrho\varrho}\cdot 1 + 2\tilde{f}_{\varrho\varphi}\cdot 0 + \frac{1}{\varrho^2}\tilde{f}_{\varphi\varphi} + \tilde{f}_\varrho\frac{1}{\varrho} + +\tilde{f}_\varphi \cdot 0 = \tilde{f}_{\varrho\varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\tilde{f}_{\varphi\varphi} + \frac{1}{\varrho}\tilde{f}_\varrho.$$

Frage 2

Die zweifach stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, für welche die partiellen Ableitungen f_{xx} und f_{yy} identisch verschwinden, sind genau

○ die Produkte einer Funktion von x mit einer Funktion von y.

○ die Produkte von zwei linearen Funktionen.

○ die Produkte einer linearen Funktion von x mit einer linearen Funktion von y.

√ ○ die Funktionen der Gestalt $a + bx + cy + dxy$ für Konstanten a, b, c, d.

Antworten (a) und (b) sind falsch, weil sie beide die Funktion $f(x, y) = x^2$ erlauben, für welche $f_{xx} = 2 \neq 0$ ist. Für die Funktionen in (c) und (d) hingegen rechnet man schnell nach, dass sie $f_{xx} = f_{yy} = 0$ erfüllen. Insbesondere ist $f(x, y) = 1 + xy$ nach (d) eine solche Funktion, welche sich aber nicht in der Form (c) schreiben lässt. Also bleibt nur (d) als richtige Antwort übrig.
Antwort (d) ist auch wirklich korrekt. Denn $\frac{\partial}{\partial x} f_x = f_{xx} = 0$ impliziert $f_x(x, y) = u(y)$ für eine Funktion $u(y)$. Somit ist $\frac{\partial}{\partial x}\big(f(x, y) - u(y)x\big) = f_x(x, y) - u(y) = 0$ und daher $f(x, y) - u(y)x = v(y)$ für eine weitere Funktion $v(y)$. Es gilt also $f(x, y) = u(y)x + v(y)$. Daraus folgt aber $f_{yy} = u''(y)x + v''(y)$, und dies verschwindet identisch genau dann, wenn $u''(y)$ und $v''(y)$ identisch verschwinden. Dann müssen aber $u(y)$ und $v(y)$ lineare Funktionen von y sein, wie in Antwort (d).

Frage 3

Gegeben ist das Integral $I = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dF$, wo D das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ bezeichnet. Je nach Wahl des Koordinatensystems und der Reihenfolge der Integrationen lässt sich I auf verschiedene Arten als zweifaches Integral ausdrücken. Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

√ ○ $I = \int_0^1 dx \int_0^1 \sqrt{x^2+y^2}\, dy$

○ $I = \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\, dy$

○ $I = \int_0^{\pi/4} d\phi \int_0^{1/\cos\phi} \varrho^2\, d\varrho$

○ $I = \int_0^1 dy \int_y^1 \sqrt{x^2+y^2}\, dx$

Frage 4

Welches der folgenden Integrale ist NICHT gleich den anderen?

○ $\int_0^1 \int_0^x x\, dydx$

√ ○ $\int_0^1 \int_0^y x\, dxdy$

○ $\int_0^1 \int_0^y y\, dxdy$

○ $\int_0^1 \int_y^1 x\, dxdy$

In (a) und (d) ist der Integrationsbereich gegeben durch dieselbe Bedingung $0 \leq y \leq x \leq 1$. Da auch der Integrand gleich ist, stimmen diese beiden Integrale überein. Dasselbe gilt für das Integral (c), welches aus (a) durch Vertauschung der Variablen x und y entsteht. Als einzig mögliche korrekte Antwort verbleibt daher (b). Wegen $\int_0^1 \int_0^y x\, dxdy = \int_0^1 \left(x^2/2\,\big|_{x=0}^{x=y}\right) dy = \int_0^1 y^2/2\, dy = y^3/6\,\big|_{y=0}^{y=1} = 1/6$ und $\int_0^1 \int_0^y y\, dxdy = \int_0^1 \left(yx\,\big|_{x=0}^{x=y}\right) dy = \int_0^1 y^2\, dy = y^3/3\,\big|_{y=0}^{y=1} = 1/3$ ist (b) tatsächlich von den anderen verschieden.

Siehe nächstes Blatt!

Frage 5

Das Integral der Funktion $f(x,y) := \sqrt{4-x^2-y^2}$ über die Menge $B := \{(x,y) \mid x,y \geq 0, x^2+y^2 \leq 4\}$ ist:

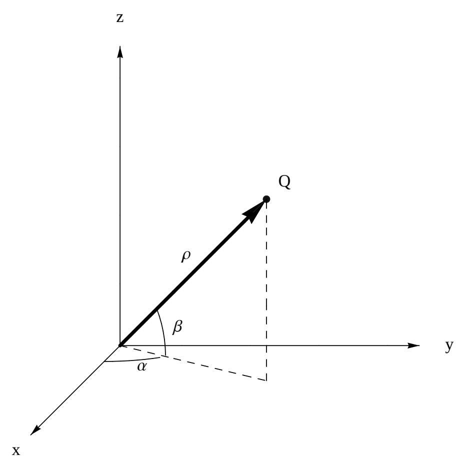
- ○ $\int_B f\,d\mu = \frac{2}{3}\pi$
- √ ○ $\int_B f\,d\mu = \frac{4}{3}\pi$
- ○ $\int_B f\,d\mu = \frac{16}{3}\pi$
- ○ $\int f\,d\mu = 8\pi$
- ○ $\int_B f\,d\mu = \frac{32}{3}\pi$

Die Funktion f ist ≥ 0 auf B, und die Menge der Punkte zwischen ihrem Graphen und der xy-Ebene ist ein Viertel der Halbkugel H mit Zentrum O und Radius 2. Das Integral berechnet daher das Volumen eines Achtels der Vollkugel mit Radius r; dieses beträgt $\frac{4}{3}\pi r^3$; also gilt $\int_B f\,d\mu = \mu(H) = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3}\pi 2^3 = \frac{4}{3}\pi$.
Aliter: Wir rechnen in Polarkoordinaten: $\int_B f\,d\mu = \int_0^2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{4-r^2} \cdot r\,d\phi\,dr = \int_0^2 \sqrt{4-r^2} \cdot r\,dr \cdot \frac{\pi}{2}$. Substitution von $u = \sqrt{4-r^2}$ mit $u\,du = -r\,dr$ liefert $\int_2^0 (-u^2)\,du \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{u^3}{3}\Big|_2^0 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{8}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{3}$.

Bitte wenden!

Frage 6

Das Volumenelement der Koordinaten, welche in der untenstehenden Abbildung definiert sind, ist gegeben durch



√ ◯ $\varrho^2 \cos\beta \, \mathrm{d}\varrho \, \mathrm{d}\alpha \, \mathrm{d}\beta$.

◯ $\varrho \cos\alpha \, \mathrm{d}\varrho \, \mathrm{d}\alpha \, \mathrm{d}\beta$.

◯ $\varrho^2 \sin\beta \, \mathrm{d}\varrho \, \mathrm{d}\alpha \, \mathrm{d}\beta$.

◯ $\varrho \, \mathrm{d}\varrho \, \mathrm{d}\alpha \, \mathrm{d}\beta$.

◯ $\varrho \sin\beta \, \mathrm{d}\varrho \, \mathrm{d}\alpha \, \mathrm{d}\beta$.

Die kartesischen Koordinaten werden wie folgt durch die Koordinaten (ϱ, β, α) ausgedrückt

$$x = \varrho \cos\alpha \cos\beta, \quad y = \varrho \sin\alpha \cos\beta \quad \text{und} \quad z = \varrho \sin\beta,$$

wobei $0 \leq \varrho < \infty$, $0 \leq \alpha < 2\pi$ und $-\pi/2 \leq \beta \leq \pi/2$. Das Volumenelement ergibt sich dann aus $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = |\det(J)|\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$ mit

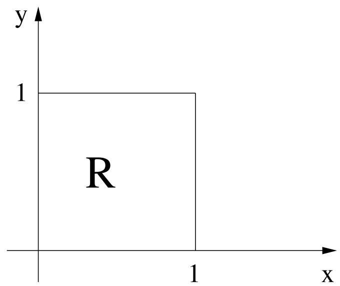
$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varrho,\alpha,\beta)} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) & -r\sin(\alpha)\cos(\beta) & -r\cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) & r\cos(\alpha)\cos(\beta) & -r\sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & 0 & r\cos(\beta) \end{pmatrix}.$$

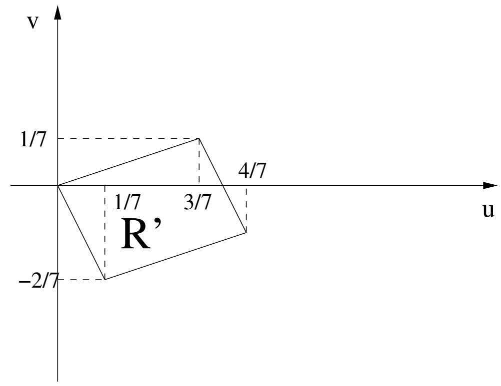
$$\Longrightarrow |\det(J)| = \varrho^2 \cos\beta$$

Also ist (a) die richtige Antwort.

2. a) Aus $\begin{cases} x = 2u + v \\ y = u - 3v \end{cases}$ bekommen wir $\begin{cases} u = \frac{1}{7}(3x + y) \\ v = \frac{1}{7}(x - 2y). \end{cases}$

Siehe nächstes Blatt!





b) $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

c) Die Fläche in der uv-Ebene ist 7-mal kleiner. Bemerke, dass

$$|det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}| = 7.$$

3. Die Richtungsableitung in Richtung $\mathbf{a}$ berechnet sich

$$D_{\mathbf{a}} f = \mathbf{grad} f \cdot \mathbf{a},$$

wobei $\mathbf{a}$ ein Einheitsvektor sein muss. Dies führt in unserem Fall zu einem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{a}} f(\mathbf{0}) &= 3 = f_x(\mathbf{0}) \\ D_{\mathbf{b}} f(\mathbf{0}) &= -2 = \frac{3}{5} f_x(\mathbf{0}) + \frac{4}{5} f_y(\mathbf{0}) \\ D_{\mathbf{c}} f(\mathbf{0}) &= 5 = -\frac{2}{3} f_x(\mathbf{0}) + \frac{1}{3} f_y(\mathbf{0}) + \frac{2}{3} f_z(\mathbf{0}) \end{aligned}$$

für die Komponenten von $\mathbf{grad} f(\mathbf{0})$.
Die Lösung lautet $\mathbf{grad} f(\mathbf{0}) = (3, -\frac{19}{4}, \frac{103}{8})$. Daher lautet die Gleichung der Tangentialebene in $\mathbf{0}$

$$3x - \frac{19}{4} y + \frac{103}{8} z = 0.$$

4. Aus Symmetriegründen oder durch Einsetzen bekommen wir $x_0 = 0$.
Da $\sinh(1/a) = 1$, rechnen wir a als

$$a = \frac{1}{Arsinh(1)} = \frac{1}{\ln(1+\sqrt{2})}$$

aus. (Sonst: Sei $z = e^{1/a} (> 0)$, dann ist $z - z^{-1} = 2$. Aus $z^2 - 2z - 1 = 0$ folgt $z = 1 + \sqrt{2}$ und $a = 1/\ln(1+\sqrt{2})$.)

Ausserdem gilt $x_0 = 0$. Die Länge der Seil ist also gleich

$$L = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \sinh^2((x - x_0)/a)} dx = 2 \int_0^1 \cosh(x/a) dx$$

$$= 2a \sinh(1/a) = 2/\ln(1+\sqrt{2}) (= 2/\mathrm{Arsinh}(1)).$$