D-MAVT D-MATL | Analysis II | FS 2013
Prof. Dr. P. Biran

Serie 12

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die Online gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zur Online MC-Fragen bis **Freitag, den 31.05.2013 um 14.00 Uhr** ab.
Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!
Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: Donnerstag, den 30.05.2013 oder Freitag, den 31.05.2013 während der Übungsstunde oder im Fächli.
Homepage der Vorlesung:
https://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2013/other/analysis2 _mavt_matl/

---

1. **Frage 1**

Der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot x^k$ ist gleich

○ 0

○ $\frac{1}{2}$

○ 1

○ 2

○ ∞

Frage 2

Der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$ ist gleich

○ 0

○ 1

○ e

○ ∞

Bitte wenden!

Frage 3

Die Entwicklung der Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2-5x+6}$ als Potenzreihe um $x_0 = 0$ lautet als

- ◯ $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{3^{k+1}} - \frac{1}{2^{k+1}})x^k$
- ◯ $\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{3^{k+1}})x^k$
- ◯ $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{3^k})x^{k-1}$
- ◯ $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{3^k} - \frac{1}{2^k})x^k$

Frage 4

Die Potenzreihenentwicklung von $\frac{1}{5+2x^2}$ um $x_0 = 0$ lautet

- ◯ $\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{2}{5})^k x^{2k}$
- ◯ $\sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{2}{5})^k x^{2k}$
- ◯ $\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{2}{5}x)^k$
- ◯ $\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{2}{5})^k x^{2k}$

Frage 5

Die Entwicklung der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ als Potenzreihe um $x_0 = 1$ lautet als

- ◯ $\sum_{k=0}^{\infty}(x-1)^k$
- ◯ $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$
- ◯ $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(x-1)^k$
- ◯ $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(x-1)^{k-1}$

Siehe nächstes Blatt!

Frage 6

Die Potenzreihenentwicklung von $\sqrt{1-2x^2}$ um $x_0 = 0$ lautet

- ◯ $1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^6 + \ldots$
- ◯ $1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^6 + \ldots$
- ◯ $1 - x^2 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^6 - \ldots$
- ◯ $1 - x^2 - x^4 - 3x^6 - \ldots$
- ◯ $1 - x^2 + x^4 - 3x^6 + \ldots$

Frage 7

Welche der folgenden Funktionen stellt die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} kx^k$ im ihren Konvergenzbereich dar?

- ◯ $(1-x)^{-1}$
- ◯ $(1-x)^{-2}$
- ◯ $(1+x)^{-2}$
- ◯ $x \cdot (1-x)^{-2}$
- ◯ $x \cdot (1-x)^{-3}$

Frage 8

Welche Funktion wird durch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k} + (-1)^k\ x^{2k+2}}{(2k+1)!}$ dargestellt?

- ◯ $\sin x + \sinh x$
- ◯ $x \sin x + \frac{1}{x} \sinh x$
- ◯ $x \sin x + x \sinh x$
- ◯ $x \cos x + \frac{1}{x} \cosh x$

Bitte wenden!

Frage 9

Sei f die Funktion mit

$$f(x) = \frac{e^x}{x+1}.$$

Welches der folgende Polynome ist das zweite Taylor-Polynom $T_2(x)$ im Punkt $x_0 = 0$?

- ◯ $1 + \frac{x^2}{2}$
- ◯ $1 + x + \frac{x^2}{2}$
- ◯ $1 + x + x^2$
- ◯ $1 + x^2$

2. Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung um $x_0 = 0$ der Funktion

$$f : x \longmapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Hinweis:
Betrachten Sie zuerst $f'(x)$.

3. [Prüfungsaufgabe Herbst 2007] Finden Sie die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_7$ der Reihenentwicklung $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ der Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y'' &= y^2 + 1 \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0. \end{aligned}$$

4. [Prüfungsaufgabe Frühling 2008] Sei $L(\varepsilon)$ die Bogenlänge des zwischen $(0,0)$ und $(1,\varepsilon)$ liegenden Teils der Kurve in der Ebene mit Gleichung $y = \varepsilon x^3$. Finden Sie die Koeffizienten $L_0, \ldots, L_4$ der Taylorreihe

$$L(\varepsilon) = L_0 + L_1\varepsilon + L_2\varepsilon^2 + L_3\varepsilon^3 + L_4\varepsilon^4 + \cdots$$

von L.