Serie 2

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die Online gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zur Online MC-Fragen bis **Freitag, den 15.03.2013 um 14.00 Uhr** ab.
Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!
Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: Donnerstag, den 14.03.2013 oder Freitag, den 15.03.2013 während der Übungsstunde.
Homepage der Vorlesung:
https://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2013/other/analysis2_mavt_matl/

---

1. **Frage 1**

   Für eine Funktion $f : (x, y) \to f(x, y)$ ist der Laplace-Operator Δ als

   $$\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$$

   definiert. Für Polarkoordinaten (ϱ, φ) setzen wir

   $$\tilde{f}(\varrho, \varphi) = f(x(\varrho, \varphi), y(\varrho, \varphi)).$$

   Wie stellt sich der Laplace-Operator in Polarkoordinaten dar?

   ○ $\Delta f = \tilde{f}_{\varrho\varrho} + \tilde{f}_{\varphi\varphi}$

   ○ $\Delta f = \tilde{f}_{\varrho\varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\tilde{f}_{\varphi\varphi} + \frac{1}{\varrho}\tilde{f}_{\varrho}$

   ○ $\Delta f = \tilde{f}_{\varrho\varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\tilde{f}_{\varphi\varphi}$

Bitte wenden!

Frage 2

Die zweifach stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, für welche die partiellen Ableitungen f_{xx} und f_{yy} identisch verschwinden, sind genau

◯ die Produkte einer Funktion von x mit einer Funktion von y.

◯ die Produkte von zwei linearen Funktionen.

◯ die Produkte einer linearen Funktion von x mit einer linearen Funktion von y.

◯ die Funktionen der Gestalt $a + bx + cy + dxy$ für Konstanten a, b, c, d.

Frage 3

Gegeben ist das Integral $I = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dF$, wo D das Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ bezeichnet. Je nach Wahl des Koordinatensystems und der Reihenfolge der Integrationen lässt sich I auf verschiedene Arten als zweifaches Integral ausdrücken. Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

◯ $I = \int_0^1 dx \int_0^1 \sqrt{x^2+y^2}\, dy$

◯ $I = \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\, dy$

◯ $I = \int_0^{\pi/4} d\phi \int_0^{1/\cos\phi} \varrho^2\, d\varrho$

◯ $I = \int_0^1 dy \int_y^1 \sqrt{x^2+y^2}\, dx$

Frage 4

Welches der folgenden Integrale ist NICHT gleich den anderen?

◯ $\int_0^1 \int_0^x x\, dydx$

◯ $\int_0^1 \int_0^y x\, dxdy$

◯ $\int_0^1 \int_0^y y\, dxdy$

◯ $\int_0^1 \int_y^1 x\, dxdy$

Siehe nächstes Blatt!

Frage 5

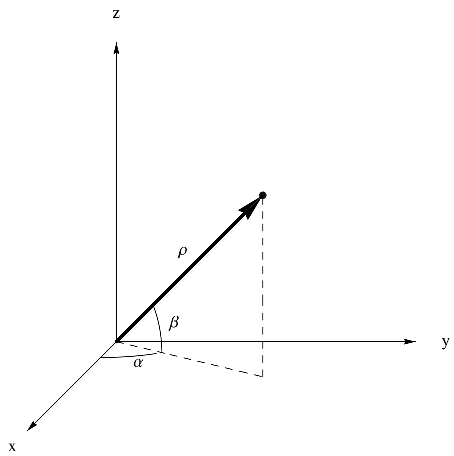
Das Integral der Funktion $f(x,y) := \sqrt{4-x^2-y^2}$ über die Menge $B := \{(x,y) \mid x,y \geq 0, x^2+y^2 \leq 4\}$ ist:

- ○ $\int_B f \, d\mu = \frac{2}{3}\pi$
- ○ $\int_B f \, d\mu = \frac{4}{3}\pi$
- ○ $\int_B f \, d\mu = \frac{16}{3}\pi$
- ○ $\int f \, d\mu = 8\pi$
- ○ $\int_B f \, d\mu = \frac{32}{3}\pi$

Bitte wenden!

Frage 6

Das Volumenelement der Koordinaten, welche in der untenstehenden Abbildung definiert sind, ist gegeben durch



◯ $\varrho^2 \cos\beta \, \mathrm{d}\varrho \, \mathrm{d}\alpha \, \mathrm{d}\beta$.

◯ $\varrho \cos\alpha \, \mathrm{d}\varrho \, \mathrm{d}\alpha \, \mathrm{d}\beta$.

◯ $\varrho^2 \sin\beta \, \mathrm{d}\varrho \, \mathrm{d}\alpha \, \mathrm{d}\beta$.

◯ $\varrho \, \mathrm{d}\varrho \, \mathrm{d}\alpha \, \mathrm{d}\beta$.

◯ $\varrho \sin\beta \, \mathrm{d}\varrho \, \mathrm{d}\alpha \, \mathrm{d}\beta$.

2. Gegeben sei die Koordinatentransformation

$$\begin{cases} x = 2u + v \\ y = u - 3v \end{cases} .$$

a) Sei $\mathcal{R}$ der Bereich der xy-Ebene beschränkt durch $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$. Skizzieren Sie den Bereich $\mathcal{R}'$ der uv-Ebene, der unter diese Transformation entsteht.

b) Berechnen Sie die Jacobimatrix $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

c) Vergleichen Sie das Resultat aus b) mit dem Verhältnis der Flächen von $\mathcal{R}$ und $\mathcal{R}'$.

3. Eine Funktion von drei Variablen $f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ besitzt im Ursprung in den drei Richtungen

$$\mathbf{a} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{b} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right), \quad \mathbf{c} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Siehe nächstes Blatt!

die Richtungsableitungen

$$D_{\mathbf{a}}f(\mathbf{0}) = 3\,, \quad D_{\mathbf{b}}f(\mathbf{0}) = -2\,, \quad D_{\mathbf{c}}f(\mathbf{0}) = 5\,.$$

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Niveaufläche von f im Ursprung.

4. [Prüfung Sommer 2012] Der Graph einer Funktion der Form

$$x \mapsto a\cosh\left(\frac{x - x_0}{a}\right) + b, \qquad a, b, x_0 \in \mathbb{R}, a > 0,$$

heisst Kettenkurve ($\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$). Eine solche Kurve beschreibt ein Seil, das an den Enden in zwei Punkten befestigt ist und unter dem Einfluss der Schwerkraft hängt. Die Enden des Seils seien an den Punkten $(-1, 1)$ und $(1, 1)$ aufgehängt, und die Steigung in $(1, 1)$ sei 1. Wie lang ist das Seil?