Serie 4

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die Online gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zur Online MC-Fragen bis **Donnerstag, den 28.03.2013 um 17.00 Uhr** ab.
Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!
Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: Donnerstag, den 28.03.2013 um $17:00$ Uhr im HG J 68.
Homepage der Vorlesung:
https://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2013/other/analysis2_mavt_matl/

---

1. Frage 1

$(3+2i)\cdot(1-2i)=\dots$

○ $7-4i$

○ $7+8i$

○ $-1-4i$

○ $3-8i$

Frage 2

Sei $z=2-3i$. Welches ist die konjugiert komplexe Zahl $\bar{z}$?

○ $2-3i.$

○ $2+3i.$

○ $-2-3i.$

○ $3-2i.$

○ $3i.$

Frage 3

Für die komplexe Zahl $z = \frac{3+2i}{4-i}$ gilt

- ◯ $z = \frac{10+11i}{17}$.
- ◯ $z = \frac{17}{8i+2}$.
- ◯ $z = \frac{14+5i}{17}$.
- ◯ $z = \frac{5+14i}{17}$.

Frage 4

Für die komplexe Zahl $z = (3+2i)^3$ gilt

- ◯ $z = 27 + 8i$.
- ◯ $z = -9 + 46i$.
- ◯ $z = -9 + 10i$.
- ◯ $z = -9 - 46i$.

Frage 5

Die Zahl $z = 3e^{\frac{5}{6}\pi i}$ ist gleich

- ◯ $z = 3 + \frac{5}{6}i$
- ◯ $z = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}$
- ◯ $z = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- ◯ $z = \frac{3\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}$

Siehe nächstes Blatt!

Frage 6

Für die komplexe Zahl $z = (-\frac{3\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2})^6$ gilt

- ◯ $z = 3^6 i$
- ◯ $z = -3^6$
- ◯ $z = -3$
- ◯ $z = 3i$

Frage 7

Es ist $\arg(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}) = \ldots$

- ◯ $\pi/6$
- ◯ $-\pi/6$
- ◯ $-5\pi/6$
- ◯ $-2\pi/3$
- ◯ $\pi/3$

Frage 8

Es ist $\arg\left(\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^4\right) = \cdots$

- ◯ $\frac{\pi}{3}$
- ◯ $\frac{2}{3}\pi$
- ◯ $\frac{5}{6}\pi$
- ◯ π
- ◯ $\frac{3}{2}\pi$

Frage 9

Sei $z = 2e^{\frac{\pi}{6}i}(5\sqrt{3} + b \cdot i)$. Für welches $b \in \mathbb{R}$ ist z eine reelle Zahl?

- ◯ $\frac{1}{\sqrt{3}}$
- ◯ $\sqrt{3}$
- ◯ $\frac{1}{5\sqrt{3}}$
- ◯ $5\sqrt{3}$
- ◯ Keines von diesen.

Frage 10

Klicken Sie die richtigen Aussagen an.

- ◯ Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$.
- ◯ Sei $z = re^{i\phi} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ die n-Wurzeln von z, für $n \geq 2$. Dann ist
$$\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1} = 0.$$
- ◯ Die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = 2\}$ ist ein Kreis mit Mittelpunkt 1 und Radius 2.
- ◯ $(1 + i)^{2000} = 2^{1000}$.
- ◯ $\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2$

Frage 11

Welche Aussage ist **richtig**? Die Abbildung $z \to iz$ ist

- ◯ eine Spielgelung an der reellen Achse.
- ◯ eine Spiegelung an der imaginären Achse.
- ◯ eine Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden.
- ◯ eine Drehung um $\frac{\pi}{2}$.
- ◯ eine Drehung um π.

Siehe nächstes Blatt!

Frage 12

Der Realteil der komplexen Zahl $\exp(i)$ beträgt

- ◯ 1.
- ◯ 0.
- ◯ $\cos(1)$.
- ◯ $\sin(1)$.
- ◯ Keine der obigen Antworten ist richtig.

Frage 13

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- ◯ $\mathrm{Re}(\exp(z)) = \exp(\mathrm{Re}\, z)$.
- ◯ $\mathrm{Im}(\exp(z)) = \exp(\mathrm{Im}\, z)$.
- ◯ $|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}\, z)$.
- ◯ $|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Im}\, z)$.
- ◯ $|\exp(z)| = \exp(|z|)$.

Frage 14

Die komplexen Lösungen der Gleichung $z^2 = i$ sind

- ◯ $-i$ und -1.
- ◯ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ und $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
- ◯ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ und $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
- ◯ i und $-i$.

Bitte wenden!

Frage 15

Finden Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^4 + z = 0$.

- ◯ $0,\ -1,\ \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- ◯ $0,\ e^{\frac{2\pi i}{3}},\ e^{-\frac{2\pi i}{3}},\ -1$
- ◯ $0,\ i,\ -i,\ -1$
- ◯ $e^{i\frac{\pi}{4}},\ e^{-i\frac{\pi}{4}},\ 0,\ -1$
- ◯ $0,\ e^{i\frac{\pi}{3}},\ 1$

2. [Tangentenfläche] Es sei eine Kurve K durch die Parameterdarstellung

$$u \mapsto \vec{s}(u) = (x(u), y(u), z(u)),$$

gegeben. Die Fläche, die beim Durchlaufen der Kurve K von der Tangente an die Kurve überstrichen wird, heisst *Tangentenfläche* S der Kurve K. Wir setzen

$$\vec{t}(u) = \dot{\vec{s}}(u)$$

und erhalten damit die Parameterdarstellung von S

$$(u, v) \mapsto \vec{r}(u, v) = \vec{s}(u) + v\vec{t}(u).$$

i) Beschreiben Sie die u-Linie im Fall $v = 0$ und die v-Linien von S.

ii) Bestimmen Sie den Normaleneinheitsvektor $\vec{n}(u, v)$ der Tangentenfläche S, und zeigen Sie, dass $\vec{n}(u, v)$ konstant auf jeder v-Linie ist.

iii) Berechnen Sie den Normaleneinheitsvektor $\vec{n}(u, v)$ der Tangentenfläche S für den Spezialfall, wo die Kurve K die Schraublinie

$$u \mapsto \vec{s}(u) = (\cos u, \sin u, hu)$$

ist. Wie gross ist der Winkel ω zwischen $\vec{n}(u, v)$ und dem Einheitsvektor in z-Richutung?

3. Betrachten Sie den Bereich A der (x, y)-Ebene, welcher durch die positive x-Achse und die Kurve

$$\varrho = \cos(\frac{\varphi}{4})$$

begrenzt wird. Berechnen Sie den Flächeninhalt des über dem Bereich A liegenden teils S der Oberfläche der Einheitskugel.

4. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{v} : (x, y, z) \mapsto \vec{v}(x, y, z) = (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z))$$

durch den Kegelmantel des Kegels mit Spitze O, der Achse gleich der z-Achse, dem halben Öffnungswinkel $\frac{\pi}{4}$ und der Höhe 1, von aussen nach innen.