Serie 7

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die Online gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zur Online MC-Fragen bis **Freitag, den 26.04.2013 um 14.00 Uhr** ab.
Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!
Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: Donnerstag, den 25.04.2013 oder Freitag, den 26.04.2013 während der Übungsstunde.
Homepage der Vorlesung:
https://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2013/other/analysis2_mavt_matl/

---

1. **Frage 1**

Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

- ◯ Potentialfelder sind wirbelfrei.
- ◯ Potentialfelder sind quellenfrei.
- ◯ Potentialfelder sind Gradientenfelder.

Frage 2

Die Arbeit A eines Vektorfeldes $\vec{v}$ längs des Geradenstücks von $(1,0,0)$ nach $(-1,-1,-1)$ sei 5. Welches Resultat erhält man, wenn man die Arbeit B von $\vec{v}$ längs des Geradenstücks von $(-1,-1,-1)$ nach $(1,0,0)$ berechnet? Klicke die **richtige** Aussage an:

- ◯ Die Arbeit B lässt sich aus den Angaben nicht berechnen.
- ◯ Die Arbeit B beträgt ebenfalls 5.
- ◯ Die Arbeit B beträgt -5.

Bitte wenden!

Frage 3

Welches der folgenden Vektorfelder hat ein Potential?

- ◯ $(x - y,\, x - y)$
- ◯ $(x^2 - y,\, x^3 + 2xy)$
- ◯ $(x^3 + 2xy,\, x^2 - y)$
- ◯ $(x^3 - xy^2,\, x^2y - y^5)$

Frage 4

Die Arbeit, welche das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \longmapsto \left(x^2 + z^2, 4y - z, 2xz + 2y\right)$$

entlang des Einheitskreises γ in der (y, z)–Ebene leistet, ist gleich ... (der Durchlaufsinn von γ bilde mit der x–Achse eine Rechtsschraube)

- ◯ π.
- ◯ 3π.
- ◯ $\frac{\pi}{2}$.
- ◯ 0.

Frage 5

Für welche a ist das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \longmapsto \left(\ln\left(1 + x^2\right) + ay^2, xy + y^2, z^3\right)$$

von der Form $\vec{v} = \mathbf{grad} f$ für eine gewisse Funktion $f = f(x, y, z)$ (die man nicht zu bestimmen braucht)?

- ◯ $a = 0$.
- ◯ $a = -1/2$.
- ◯ $a = 1/2$.
- ◯ $a = 1/2$ und $a = -1/2$.
- ◯ Es gibt kein solches a, da der Definitionsbereich von $\vec{v}$ nicht einfach zusammenhängend ist.

Siehe nächstes Blatt!

Frage 6

Welche der folgender Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind einfach zusammenhängend?

- ◯ $\mathbb{R}^2$
- ◯ Kreisscheibe
- ◯ $\mathbb{R}^2 \setminus x-$Achse
- ◯ $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,2)\}$
- ◯ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 1\}$

Bitte wenden!

Frage 7

Welche der folgender Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ sind einfach zusammenhängend?

◯ $\mathbb{R}^3$

◯ Kugel

◯ $\mathbb{R}^3 \setminus x-$Achse

◯ $\mathbb{R}^3 \setminus \{(1,2,3)\}$

◯ $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \geq 1\}$

2. Sei S eine Fläche in der Ebene mit Rand ∂S.

a) [**Satz von Green**] Zeigen Sie, dass für stetig differenzierbare Funktionen $P(x,y)$ und $Q(x,y)$ gilt

$$\int_{\partial S} (P\,dx + Q\,dy) = \int\int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Hinweis: Satz von Stokes für das Vektorfeld $(P, Q, 0)$.

b) Mit $P(x,y) = -y$ und $Q(x,y) = 0$ folgt aus a), dass der Flächeninhalt $Fl(S)$ von S gleich

$$Fl(S) = -\int_{\partial S} y\,dx$$

ist. Finden Sie ähnliche Formel für die Komponenten des Schwerpunkts

$$\frac{1}{Fl(S)} \int\int_S x\,dxdy\ ,\quad \frac{1}{Fl(S)} \int\int_S y\,dxdy$$

und für das polare Trägheitsmoment

$$\int\int_S (x^2 + y^2) dxdy$$

als Integrale entlang ∂S.

3. Wir betrachten ein (instationäres) Magnetfeld

$$\vec{H} : (x,y,z,t) \mapsto \vec{H}(x,y,z,t).$$

Im Definitionsbereich dieses Magnetfeldes sei eine geschlossene Kurve C gegeben; diese betrachten wir als Weg, indem wir C mit einem Durchlaufsinn versehen. Konkret können wir uns C als Draht vorstellen, an dem wir die elektrische Spannung messen werden, und zwar in der durch den Durchlaufsinn gegebenen Richtung. Ferner sei S irgendeine Fläche mit Rand $\partial S = C$. Schliesslich betrachten wir auf S denjenigen Normaleneinheitsvektor aus, der mit dem Durchlaufsinn auf C eine Rechtsschraube bildet. Wit bezeichnen nun mit Z den Fluss von $\vec{H}$ durch S in Richtung $\vec{n}$,

$$Z = \iint_S \vec{H} \cdot \vec{n} dO.$$

Siehe nächstes Blatt!

Das physikalische Experiment zeigt uns dann Folgendes: Falls Z zeitlich variiert, so fliesst in C ein elektrischer Strom, und zwar besagt das von Faraday (M. Faraday, $1791 - 1867$) stammende Erfahrungsgesetz, dass für die induzierte Spannung die Gleichung

$$V_{ind} = -\mu_0 \frac{dZ}{dt}$$

gilt, d.h. die induzierte Spannung ist proportional zur Änderung des Flusses Z. Die Verbindung zwischen Spannung V_{ind} und elektrischen Feld $\vec{E}$ ist gegeben surch

$$V_{ind} = \int_C \vec{E} d\vec{r}.$$

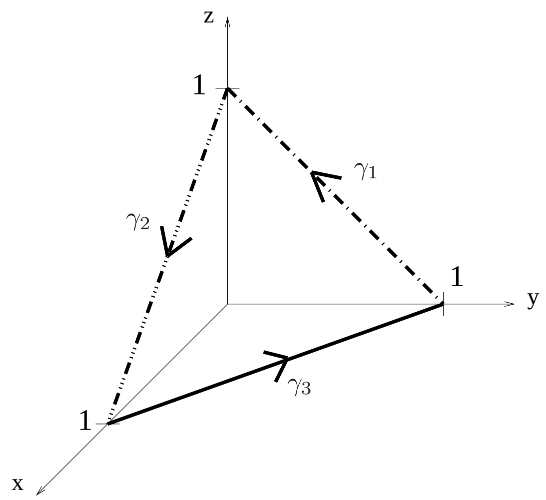
Zeigen Sie, dass die folgende Maxwell'sche Gleichung gilt:

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \mu_0 \vec{H}_t = 0.$$

4. Berechnen Sie das Integral $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{r}$ für das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \longmapsto \left(-x^3 - 2x + z, -y^3 - 2y + x, -z^3 - 2z + y\right)$$

und die Kurve $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ (siehe die untenstehende Figur)



a) direkt.

b) mit Hilfe des Satzes von Stokes.