Dr. Francesca da Lio
Dr. Markus Hansen FS2013

Komplexe Analysis (D-ITET,RW)
Serie 8

Laurentreihen und Residuenkalkül.

Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|} z^n \,.$$

b) Bestimmen Sie ferner Lage und Typ der isolierten Singularitäten der Grenzfunktion $f(z)$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die isolierten Singularitäten der Funktionen

$$f_1(z) = \frac{1}{e^z - 1} \qquad \text{und} \qquad f_2(z) = \frac{1}{1 - \cos(z)}$$

sowie deren Typ. Berechnen Sie ferner die Residuen bezüglich allen Singularitäten und geben Sie die Hauptteile der zugehörigen Laurent-Reihen-Entwicklungen an (d.h. der Reihenentwicklung in geeigneten punktierten Kreisscheiben mit Mittelpunkt in den Singularitäten).

Aufgabe 3

Sei

$$f(z) = \frac{e^{1/z}}{z-1} + \frac{cz}{2\sin(\pi z)}$$

mit einem komplexen Parameter c.
Bestimmen Sie Lage und Typ aller Singularitäten von f und berechnen Sie die zugehörigen Residuen. *Hinweis:* Es gilt $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$.

Berechnen Sie ferner das Integral

$$\int_{\partial B(0,r)} f(z) dz \,,$$

wobei $B(0,r)$ den Kreis um den Ursprung mit Radius r bezeichnet, in Abhängigkeit von r.

Bemerkung: Die ist eine leicht modifizierte Version einer Prüfungsaufgabe vom Februar 2013.