D-MAVT | Lineare Algebra II | FS 2013

Prof. Dr. N. Hungerbühler

MC-Fragen Serie 10

Einsendeschluss: Freitag, der 17. Mai um 14:00 Uhr.

Aufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

√ ○ $x^2 + xy + 3y^2$ ist eine quadratische Form.

Eine allgemeine quadratische Form auf $\mathbb{R}^2$ ist von der Form

$$q_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (x,y) \mapsto (x,y)^\top A(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

für eine symmetrische, reelle Matrix $A = (a_{ij})$. Die Abbildung $(x,y) \mapsto x^2 + xy + 3y^2$ ist von dieser Form für $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$.

○ $x^2 + y$ ist eine quadratische Form.

Die Abbildung $(x,y) \mapsto x^2 + y$ ist nicht von der Form aus der vorherigen Antwort. Somit ist sie keine quadratische Form.

√ ○ $2x_1x_2$ wird durch die Hauptachsentransformation $y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+x_2), \ \ y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2)$ zur rein quadratischen Form $y_1^2 - y_2^2$.

Es gilt

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+x_2)\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-x_2)\right)^2 = 2x_1x_2.$$

Daher wird $2x_1x_2$ durch die Transformation $y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+x_2), y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-x_2)$ zur rein quadratischen Form $y_1^2 - y_2^2$. Diese Transformation ist von der Form $y = Tx$ für die orthogonale Matrix $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ (die Spalten bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$). Daher handelt es sich um eine Hauptachsentransformation.

√ ○ $2x_1x_2 = 1$ stellt eine Hyperbel dar.

Nach der Hauptachsentransformation bei der vorherigen Aussage ist dieser Kegelschnitt durch $y_1^2 - y_2^2 = 1$ gegeben. Es handelt sich also tatsächlich um eine Hyperbel (mit den Asymptoten $y_1 = \pm y_2$).

○ $2x_1x_2$ ist eine positiv definite quadratische Form.

Wir haben bei der dritten Aussage gesehen, dass $2x_1x_2$ nach Hauptachsentransformation zu $y_1^2 - y_2^2$ wird. Diese quadratische Form nimmt daher sowohl positive wie auch negative Werte an. Sie ist also indefinit und insbesondere nicht positiv definit.