

Serie 6

Aufgabe 1 ist online zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 19. April um 14:00 Uhr** ab.

Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder im entsprechenden Fach im **HG J 68**.

Aufgabe 1

a) Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ so, dass $Ax = 0$ nur die triviale Lösung hat. Dann gilt:

- ☐ $\dim(\text{Bild } A) = n$.
- ☐ $\dim(\text{Bild } A) = 1$.
- ☐ $\dim(\text{Kern } A) = 0$.
- ☐ $\dim(\text{Kern } A) = 1$.

b) Das Bild von

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch die lineare Hülle der Vektoren...

- ☐ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- ☐ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.
- ☐ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- ☐ $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- ☐ $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

c) Eine Basis des Kerns von

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch...

- ☐ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

☐ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$

☐ $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

☐ $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$

☐ $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$

d) Ein Vektor habe bezüglich der Basis $\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ die Koordinaten $(-1, -1)$. Die Koordinaten bezüglich der Standardbasis sind...

☐ $(\frac{1}{2}, 0).$

☐ $(-1, -1).$

☐ $(0, -2).$

☐ $(2, 0).$

☐ $(1, 1).$

e) Seien A und B Darstellungsmatrizen einer Funktion $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dann gilt $\det A = \det B$.

☐ Richtig

☐ Falsch

Aufgabe 2

Gegeben sei der Vektorraum $V^3 = \mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis \mathcal{B} . Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

definiert eine lineare Abbildung von V^3 nach V^3 .

a) Durch die Wahl der neuen Basis

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

werden neue Koordinaten eingeführt. Bestimmen Sie die Übergangsmatrix T von \mathcal{B} nach \mathcal{B}' .

b) Durch welche Matrix B wird die lineare Abbildung in den neuen Koordinaten beschrieben?

c) Interpretieren Sie die Abbildung geometrisch.

Aufgabe 3

Gegeben seien zwei lineare Gleichungssysteme $Ax = b_i$, $i = 1, 2$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie mit Hilfe der *Fredholm-Alternative*, ob die beiden Gleichungssysteme jeweils eine Lösung besitzen.

Aufgabe 4

Darstellung eines vierdimensionalen Würfels:

Sei $W := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^\top \in \mathbb{R}^4 : 0 \leq x_i \leq 1\}$ der Einheitswürfel in \mathbb{R}^4 . Wir betrachten die Projektionen $P_1 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ entlang von $(1, 1, 1, -2)^\top$ auf den Unterraum mit $x_4 = 0$ und $P_2 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ entlang von $(2, 1, -4, 0)^\top$ auf den Unterraum mit $x_3 = 0$, sowie die Abbildung $E : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2, x_3, x_4)^\top \mapsto (x_1, x_2)^\top$.

a) Man bestimme die Darstellungsmatrizen von P_1 , P_2 und E .

b) Man bestimme die Darstellungsmatrizen der zusammengesetzten Abbildungen $P_2 \circ P_1$ und $\phi := E \circ P_2 \circ P_1$.

c) Man skizziere das Bild der Kanten von W unter ϕ .