Serie 1

Einsendeschluss: Freitag, der 1. März um 14:00 Uhr.

Frage 1

Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

√ ○ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y)^\top \mapsto (x + y, 2x, 0)^\top$

○ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y)^\top \mapsto (x + y, 2x, 1)^\top$

√ ○ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

√ ○ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 0$

√ ○ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f die Identität

○ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1$

√ ○ $f : C^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ h \mapsto h''(0)$

○ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, f die Spiegelung an der Geraden $y = x + 1$

√ ○ $f : \mathbb{R}^2 \to C^\infty(\mathbb{R}),\ (x, y)^\top \mapsto h$, wobei h diejenige Linearkombination der Funktionen sin und cos ist, deren Graph durch die Punkte $(-1, x)$ und $(1, y)$ geht.

Eine Abbildung $f : V \to W$ zwischen zwei reellen Vektorräumen V und W heisst linear, falls für alle $x, y \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

- $f(x+y) = f(x) + f(y)$,
- $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Für eine Abbildung der Form

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ v \mapsto A \cdot v,$$

wobei A eine $m \times n$-Matrix ist, sind diese Eigenschaften erfüllt. Die erste, dritte, vierte und fünfte Abbildung sind von dieser Form für die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ (0),\ (1).$$

Daher sind diese Abbildungen linear.
Für die zweite, sechste und achte Abbildung kann einfach nachgeprüft werden, dass die obigen Eigenschaften nicht erfüllt sind. Am schnellsten sieht man dies durch Betrachten des Bildes des Nullvektors. Dieses ist bei diesen drei Abbildungen immer verschieden von Null, nämlich gleich $(0,0,1)^\top$ bzw. 1 bzw. $(-1,1)^\top$. Daher ist die Eigenschaft

$$f(0+0) = f(0) + f(0)$$

nicht erfüllt und diese drei Abbildungen sind nicht linear.
Die Linearität der siebten Abbildung folgt aus den Ableitungsregeln: Es gilt $(g+h)'' = g'' + h''$ und $(\alpha h)'' = \alpha h''$ für alle $g,\, h \in C^2(\mathbb{R})$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.
Es bleibt die Linearität der letzten Abbildung nachzuprüfen. Das Bild von $(x,y)^\top$ unter dieser Abbildung ist gleich $\alpha \cdot \sin + \beta \cdot \cos$, wobei (α, β) die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \alpha \sin(-1) + \beta \cos(-1) &= x \\ \alpha \sin(1) + \beta \cos(1) &= y \end{aligned}$$

ist. Dieses hat die eindeutige Lösung

$$\alpha = \frac{y-x}{2 \cdot \sin 1},\ \beta = \frac{x+y}{2 \cdot \cos 1}.$$

Somit ist f durch

$$(x,y)^\top \longmapsto \frac{y-x}{2 \cdot \sin 1} \sin + \frac{x+y}{2 \cdot \cos 1} \cos$$

gegeben und es gilt

$$\begin{aligned} f\big((x,y)^\top + (x',y')^\top\big) &= f\big((x+x', y+y')^\top\big) \\ &= \frac{(y+y') - (x+x')}{2 \cdot \sin 1} \sin + \frac{(x+x') + (y+y')}{2 \cdot \cos 1} \cos \\ &= \frac{y-x}{2 \cdot \sin 1} \sin + \frac{x+y}{2 \cdot \cos 1} \cos + \frac{y'-x'}{2 \cdot \sin 1} \sin + \frac{x'+y'}{2 \cdot \cos 1} \cos \\ &= f\big((x,y)^\top\big) + f\big((x',y')^\top\big) \end{aligned}$$

sowie für $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f\big(\alpha(x,y)^\top\big) &= f\big((\alpha x, \alpha y)^\top\big) \\ &= \frac{\alpha y - \alpha x}{2 \cdot \sin 1} \sin + \frac{\alpha x + \alpha y}{2 \cdot \cos 1} \cos = \alpha \left(\frac{y-x}{2 \cdot \sin 1} \sin + \frac{x+y}{2 \cdot \cos 1} \cos \right) \\ &= \alpha f\big((x,y)^\top\big). \end{aligned}$$

Somit ist f linear.