

## Serie 11

Aufgabe 1 ist online zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 24. Mai um 14:00 Uhr** ab.

Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder im entsprechenden Fach im **HG J 68**.

---

### Aufgabe 1

Sind die folgenden Aussagen wahr?

- ☐ Die allgemeine Lösung von  $y' = ay$  ist  $y(x) = e^{ax}$ .
- ☐ Sind  $y_1$  und  $y_2$  Lösungen von  $y''(x) = a(x)y(x) + b(x)y'(x)$ , so ist auch jede Linearkombination von  $y_1$  und  $y_2$  eine Lösung.
- ☐  $\sin(\omega x)$  und  $\cos(\omega x)$  sind Lösungen von  $y'' + \omega^2 y = 0$ .
- ☐  $a \sinh(\omega x) + b \cosh(\omega x)$  ist die allgemeine Lösung von  $y'' - \omega^2 y = 0$ .
- ☐  $ae^{\omega x} + be^{-\omega x}$  ist die allgemeine Lösung von  $y'' - \omega^2 y = 0$ .

### Aufgabe 2

Lösen Sie folgendes Ausgleichsproblem mit der  $QR$ -Zerlegung:

$$\begin{array}{rrrrrr} 4x_1 & + & x_2 & - & 9 & = & r_1 \\ 7x_1 & + & x_2 & - & 12 & = & r_2 \\ 4x_1 & + & 4x_2 & - & 15 & = & r_3. \end{array}$$

Um Ihnen aufwendige Rechnungen zu ersparen, geben wir  $Q$  an:

$$Q = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 8 \\ 7 & -4 & -4 \\ 4 & 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

- a) Verifizieren Sie, dass  $Q$  orthogonal ist.
- b) Geben Sie zuerst  $A$  und  $c$  an, und bestimmen Sie dann  $R$  und  $d = Q^\top c$ .
- c) Lösen Sie das Ausgleichsproblem.
- d) Bestimmen Sie die Länge des minimalen Residuenvektors  $r$ .

### Aufgabe 3

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung  $\dot{y} = A y$ , wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

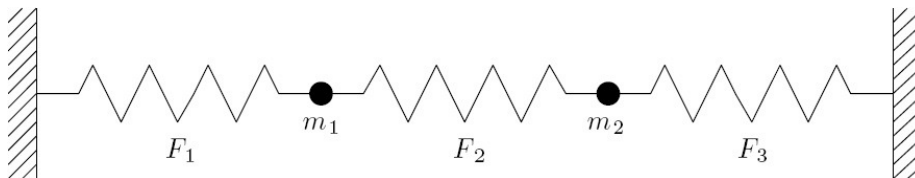
- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.
- b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung zu den Anfangsbedingungen

$$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

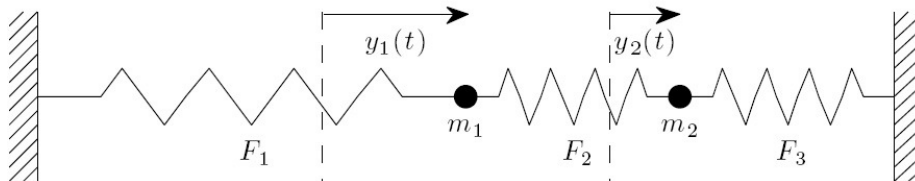
- c) Bestimmen Sie alle Anfangsbedingungen  $y_1(0), y_2(0), y_3(0)$ , für welche die zugehörigen Lösungen  $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$  gegen Null streben für  $t \rightarrow +\infty$ .

#### Aufgabe 4

Gegeben sei folgendes Massen-Feder-System in Ruhelage:



Zur Zeit  $t$ , ausgelenkt aus der Ruhelage, sieht das System wie folgt aus:



Aus dem Hookeschen Federgesetz

$$\text{Kraft einer Feder} = \text{Federkonstante} \cdot \text{Ausdehnung der Feder}$$

und dem Newtonschen Prinzip

$$\text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung} = \text{Kraft}$$

können wir das Differentialgleichungssystem 2. Ordnung

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 &= -f_1 y_1 + f_2 (y_2 - y_1) \\ m_2 \ddot{y}_2 &= -f_2 (y_2 - y_1) - f_3 y_2 \end{aligned}$$

herleiten, wobei  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  die Federkonstanten der drei Federn bezeichnen. Wir nehmen an, dass die Federkonstanten mit den Massen wie folgt zusammenhängen:  $f_1 = 3m_1$ ,  $f_2 = 2m_1 = m_2$ ,  $f_3 = 3m_2$ . Die Bewegung wird also durch das Differentialgleichungssystem 2. Ordnung

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= -5y_1 + 2y_2 \\ \ddot{y}_2 &= y_1 - 4y_2 \end{aligned}$$

beschrieben. Bestimmen Sie die Lösung dieses Systems zu den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 6, & \dot{y}_1(0) &= 0, \\ y_2(0) &= 0, & \dot{y}_2(0) &= 0. \end{aligned}$$