Serie 5

Einsendeschluss: Freitag, der 12. April um 14:00 Uhr.

Aufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

√ ○ Die Abbildung $V^n \to \mathbb{R}^n,\ v \mapsto [v]_{\mathcal{B}}$, die jedem Vektor eines n-dimensionalen Vektorraumes seinen Koordinatenvektor bezüglich einer Basis $\mathcal{B}$ zuordnet, ist linear.

Sei $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ und seien $x,\ y \in V$ mit

$$\begin{aligned} x &= x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n, \\ y &= y_1 b_1 + \cdots + y_n b_n. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$x + y = (x_1 + y_1) b_1 + \cdots + (x_n + y_n) b_n$$

und für $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda x = (\lambda x_1) b_1 + \cdots + (\lambda x_n) b_n.$$

Somit haben wir

$$\begin{aligned} [x+y]_{\mathcal{B}} &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)^\top = (x_1, \ldots, x_n)^\top + (y_1, \ldots, y_n)^\top \\ &= [x]_{\mathcal{B}} + [y]_{\mathcal{B}}, \\ [\lambda x]_{\mathcal{B}} &= (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)^\top = \lambda (x_1, \ldots, x_n)^\top = \lambda [x]_{\mathcal{B}}, \end{aligned}$$

die Abbildung $v \mapsto [v]_{\mathcal{B}}$ ist also linear.

√ ○ Bezüglich der Standardbasis e_1, e_2, e_3 im $\mathbb{R}^3$ ist die Orthogonalprojektion $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ x \mapsto \langle x, e_1 \rangle e_1$ gegeben durch die Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Bilder der Standardbasisvektoren unter $\mathcal{F}$ bekommen wir

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(e_1) &= \langle e_1, e_1 \rangle e_1 = e_1, \\ \mathcal{F}(e_2) &= \langle e_2, e_1 \rangle e_2 = 0, \\ \mathcal{F}(e_3) &= \langle e_3, e_1 \rangle e_3 = 0. \end{aligned}$$

Da in den Spalten der Darstellungsmatrix von $\mathcal{F}$ die Koordinatenvektoren der Bilder der Basisvektoren stehen, ist $\mathcal{F}$ in der Tat gegeben durch diese Matrix.

○ Sei $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ linear. Dann existiert ein Vektor, der gleichzeitig im Kern und im Bild von $\mathcal{F}$ liegt.

Der Kern von $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ist in $\mathbb{R}^3$ enthalten und das Bild von F ist in $\mathbb{R}$ enthalten. Da es keine Vektoren gibt, die gleichzeitig in $\mathbb{R}^3$ und in $\mathbb{R}$ liegen, existieren keine Vektoren, die gleichzeitig im Kern und im Bild von F liegen.

√ ○ Sei x eine Linearkombination von Spalten der Matrix A und y eine Lösung von $A^\top y = 0$. Dann stehen x und y bezüglich des Standardskalarproduktes senkrecht aufeinander.

Wir nehmen an, dass A eine $m \times n$-Matrix ist. Man beachte, dass $\text{Bild}(A)$ der von den Spalten von A aufgespannte Unterraum von $\mathbb{R}^m$ ist. Somit liegt die gegebene Linearkombination x von Spalten von A in $\text{Bild}(A)$. Weiter liegt die gegebene Lösung y von $A^\top y = 0$ in $\text{Kern}(A^\top)$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Unterräume $\text{Bild}(A)$ und $\text{Kern}(A^\top)$ von $\mathbb{R}^m$ bezüglich des Standardskalarprodukts senkrecht aufeinander stehen. Darum stehen x und y bezüglich des Standardskalarprodukts senkrecht aufeinander.

√ ○ Falls der Kern einer linearen Abbildung $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nur aus dem Nullvektor besteht, so ist die Abbildung invertierbar.

Eine lineare Abbildung $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ wird bezüglich der Standardbasis durch eine $n \times n$-Matrix A beschrieben, die Abbildung $\mathcal{F}$ ist also gegeben durch $x \mapsto Ax$. Falls der Kern von $\mathcal{F}$ nur aus dem Nullvektor besteht, hat das lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ nur die triviale Lösung. Das ist äquivalent dazu, dass die Matrix A invertierbar ist (siehe z.B. die Repetitions-Folien, die in der Vorlesung vom 27. November des Herbstsemesters gezeigt wurden). Daher ist $\mathcal{F}$ invertierbar, denn A^{-1} beschreibt $\mathcal{F}^{-1}$ bezüglich der Standardbasis, da $AA^{-1}x = A^{-1}Ax = x$ gilt.