

Lösungen Serie 6

Aufgabe 1

Siehe separates pdf.

Aufgabe 2

Gegeben sei der Vektorraum $V^3 = \mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis \mathcal{B} . Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

definiert eine lineare Abbildung von V^3 nach V^3 .

a) Durch die Wahl der neuen Basis

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

werden neue Koordinaten eingeführt. Bestimmen Sie die Übergangsmatrix T von \mathcal{B} nach \mathcal{B}' .

b) Durch welche Matrix B wird die lineare Abbildung in den neuen Koordinaten beschrieben?

c) Interpretieren Sie die Abbildung geometrisch.

a) Die Übergangsmatrix von \mathcal{B}' nach \mathcal{B} ist durch

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben, weil deren Spalten aus den Koordinatenvektoren der neuen Basisvektoren bezüglich der Standardbasis bestehen. Die gesuchte Übergangsmatrix T von \mathcal{B} nach \mathcal{B}' ist invers zu S . Wir invertieren darum S mit dem Gaußverfahren:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \rightarrow & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{array} \right) \\ \rightarrow & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Somit gilt

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

b) Nach der Formel aus der Vorlesung gilt $B = TAT^{-1} = TAS$. Somit bekommen wir

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- c) Wir bezeichnen die Basisvektoren aus \mathcal{B}' mit b'_1, b'_2 und b'_3 . Nach Aufgabenteil b) wird b'_1 auf $-b'_1$ und b'_2 auf $-b'_2$, sowie b'_3 auf 0 abgebildet. Somit handelt es sich um die Projektion entlang b'_3 auf die Ebene, die durch b'_1 und b'_2 aufgespannt wird, gefolgt von einer Punktspiegelung am Nullpunkt.

Bemerkung: Weil b'_3 senkrecht auf b'_1 und b'_2 steht, ist die obige Projektion entlang b'_3 die Orthogonalprojektion auf die Ebene, die durch b'_1 und b'_2 aufgespannt wird (bezüglich des Standardskalarprodukts).

Aufgabe 3

Gegeben seien zwei lineare Gleichungssysteme $Ax = b_i, i = 1, 2$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie mit Hilfe der *Fredholm-Alternative*, ob die beiden Gleichungssysteme jeweils eine Lösung besitzen.

Die Fredholm-Alternative besagt: *Ein Gleichungssystem $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn b senkrecht auf allen Lösungen des adjungierten Gleichungssystems $A^\top y = 0$ steht.*

Da das Standardskalarprodukt linear in beiden Argumenten ist, ist dies genau dann erfüllt, wenn b senkrecht auf den Vektoren einer Basis des Lösungsraums von $A^\top y = 0$ steht.

Wir bestimmen daher eine Basis des Lösungsraums von $A^\top y = 0$ mit dem Gaußverfahren:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungen erfüllen also $y_2 = 2y_3$ und $y_1 = -2y_2 + y_3 - y_4 = -3y_3 - y_4$, wobei y_3 und y_4 freie Parameter sind. Eine mögliche Basis des Lösungsraums ist damit gegeben durch die Vektoren

$$c^{(1)} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit finden wir:

- $Ax = b_1$ hat eine Lösung, da $\langle b_1, c^{(1)} \rangle = \langle b_1, c^{(2)} \rangle = 0$.
- $Ax = b_2$ hat keine Lösung, da $\langle b_2, c^{(1)} \rangle = -2 \neq 0$.

Aufgabe 4

Darstellung eines vierdimensionalen Würfels:

Sei $W := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^\top \in \mathbb{R}^4 : 0 \leq x_i \leq 1\}$ der Einheitswürfel in \mathbb{R}^4 . Wir betrachten die Projektionen $P_1 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ entlang von $(1, 1, 1, -2)^\top$ auf den Unterraum mit $x_4 = 0$ und $P_2 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ entlang von $(2, 1, -4, 0)^\top$ auf den Unterraum mit $x_3 = 0$, sowie die Abbildung $E : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top \mapsto (x_1, x_2)^\top$.

- Man bestimme die Darstellungsmatrizen von P_1, P_2 und E .
 - Man bestimme die Darstellungsmatrizen der zusammengesetzten Abbildungen $P_2 \circ P_1$ und $\phi := E \circ P_2 \circ P_1$.
 - Man skizziere das Bild der Kanten von W unter ϕ .
- a) Wir bezeichnen die Vektoren der Standardbasis von \mathbb{R}^4 mit e_1, e_2, e_3 und e_4 .
- Da e_1, e_2 und e_3 im Unterraum mit $x_4 = 0$ liegen, gilt $P_1(e_1) = e_1, P_1(e_2) = e_2$ und $P_1(e_3) = e_3$. Weiter haben wir

$$P_1(e_4) = e_4 + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

denn bei einer Projektion wird ein Punkt/Vektor (hier e_4) soweit entlang der Projektionsrichtung (hier $(1, 1, 1, -2)^\top$) verschoben, bis er im Unterraum (hier $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 = 0\}$) liegt, auf welchen projiziert wird. Konkret liefert dies in unserem Fall das Gleichungssystem

$$e_4 + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die 4. Komponente liefert also $\lambda = \frac{1}{2}$.

Somit ist die Darstellungsmatrix von P_1 (bezüglich der Standardbasis) durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

- Da e_1, e_2 und e_4 im Unterraum mit $x_3 = 0$ liegen, gilt $P_2(e_1) = e_1, P_2(e_2) = e_2$ und $P_2(e_4) = e_4$. Weiter haben wir

$$P_2(e_3) = e_3 + \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Somit ist die Darstellungsmatrix von P_2 (bezüglich der Standardbasis) durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

- Es gilt $E(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $E(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, sowie $E(e_3) = E(e_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Somit ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

die Darstellungsmatrix von E , bezüglich der Standardbasen von \mathbb{R}^4 resp. \mathbb{R}^2 .

- b) • Die Darstellungsmatrix von $P_2 \circ P_1$ ist das Produkt der Darstellungsmatrizen von P_2 und P_1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Die Darstellungsmatrix von ϕ ist das Produkt der Darstellungsmatrizen von E und $P_2 \circ P_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}.$$

- c) Für die Darstellung der Kanten des vierdimensionalen Würfels berechnen wir die Bilder der 16 Ecken $(x_1, x_2, x_3, x_4)^\top$ mit $x_i \in \{0, 1\}$ unter ϕ :

$$\begin{array}{ll} \phi((0, 0, 0, 0)^\top) = (0, 0)^\top & \phi((0, 0, 0, 1)^\top) = \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{8}\right)^\top \\ \phi((1, 0, 0, 0)^\top) = (1, 0)^\top & \phi((1, 0, 0, 1)^\top) = \left(\frac{7}{4}, \frac{5}{8}\right)^\top \\ \phi((0, 1, 0, 0)^\top) = (0, 1)^\top & \phi((0, 1, 0, 1)^\top) = \left(\frac{3}{4}, \frac{13}{8}\right)^\top \\ \phi((1, 1, 0, 0)^\top) = (1, 1)^\top & \phi((1, 1, 0, 1)^\top) = \left(\frac{7}{4}, \frac{13}{8}\right)^\top \\ \phi((0, 0, 1, 0)^\top) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)^\top & \phi((0, 0, 1, 1)^\top) = \left(\frac{5}{4}, \frac{7}{8}\right)^\top \\ \phi((1, 0, 1, 0)^\top) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)^\top & \phi((1, 0, 1, 1)^\top) = \left(\frac{9}{4}, \frac{7}{8}\right)^\top \\ \phi((0, 1, 1, 0)^\top) = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)^\top & \phi((0, 1, 1, 1)^\top) = \left(\frac{5}{4}, \frac{15}{8}\right)^\top \\ \phi((1, 1, 1, 0)^\top) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)^\top & \phi((1, 1, 1, 1)^\top) = \left(\frac{9}{4}, \frac{15}{8}\right)^\top \end{array}$$

(Linearität ausnutzen! z.B. sind die Werte 5 – 8 der ersten Spalte gleich den ersten 4 Werten verschoben/addiert um $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})^\top$). Die Kanten verbinden die Ecken, die sich nur in einer der vier Koordinaten unterscheiden. Dies ergibt folgendes Bild:

