Lösungen Serie 5

Aufgabe 1

Siehe separates `pdf`.

Aufgabe 2

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie Basen für $\operatorname{Kern} A$ und $\operatorname{Bild} A$.

$\operatorname{Kern} A = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = 0\}$,
$\operatorname{Bild} A = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid \text{es existiert ein } x \in \mathbb{R}^4, \text{ so dass } y = Ax\}$.
Aus dem Buch von Nipp/Stoffer (Seiten 122-123) wissen wir, dass für eine $m\times n$-Matrix A gilt:

i) $b \in \operatorname{Bild} A \Leftrightarrow Ax = b$ besitzt mindestens eine Lösung.

ii) $x \in \operatorname{Kern} A \Leftrightarrow x$ löst $Ax = 0$.

iii) $\dim(\operatorname{Bild} A) + \dim(\operatorname{Kern} A) = r + (n - r) = n$, wobei $r = \operatorname{Rang} A$.

iv) $\operatorname{Bild} A = \operatorname{span}\left\{a^{(1)}, \dots, a^{(n)}\right\}$, wobei $a^{(i)}$ die i-te Spalte von A bezeichnet.

Löse also zunächst $Ax = 0$ mit Gausselimination:

$$\begin{array}{|cccc|c|} \hline 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \overset{(E)_1}{\rightarrow} \begin{array}{|cccc|c|} \hline 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Wähle } x_4 = \alpha \in \mathbb{R},\ x_3 = \beta \in \mathbb{R},$$
$$2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2}(x_4 - x_3) = \frac{3}{2}(\alpha - \beta),$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}(\beta - 3\alpha)$$
$$\Rightarrow \mathcal{L} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Somit ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von $\operatorname{Kern} A$. Aus *iii)* folgt $\dim(\operatorname{Bild} A) = 4 - \dim(\operatorname{Kern} A) = 2$. Wegen *iv)* müssen wir also 2 linear unabhängige Spaltenvektoren von A wählen. Aus dem obigen Gauss-Schema sieht man, dass z.B. $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind. Somit ist $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von $\operatorname{Bild} A$.

Aufgabe 3

Wir betrachten die Ebene E in $\mathbb{R}^3$, gegeben durch $x_1 = 0$, und die lineare Abbildung $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die jedes $x \in \mathbb{R}^3$ orthogonal auf E projiziert.

a) Durch welche Matrix A wird $\mathcal{F}$ bezüglich der Standardbasis beschrieben?

b) Bestimmen Sie $\operatorname{Kern} A$ und $\dim(\operatorname{Kern} A)$.

c) Bestimmen Sie $\operatorname{Bild} A$ und $\dim(\operatorname{Bild} A)$.

a) Betrachte die Standardbasis e_1, e_2, e_3. Der Vektor e_1 steht senkrecht zu E. Die Abbildung $\mathcal{F}$ projiziert e_1 also auf $0 \in E$:

$$\mathcal{F}(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =: a^{(1)}.$$

Da e_2 und e_3 bereits in E liegen, folgt:

$$\mathcal{F}(e_2) = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =: a^{(2)},$$

$$\mathcal{F}(e_3) = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =: a^{(3)}.$$

Es folgt

$$A = (a^{(1} \; a^{(2)} \; a^{(3)}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) $\operatorname{Kern} A$ ist die Lösungsmenge von $Ax = 0$, besteht also aus allen Vektoren $(x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ mit $x_2 = x_3 = 0$. Somit ist

$$\operatorname{Kern} A = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

und es folgt $\dim(\operatorname{Kern} A) = 1$.

c) Es gilt $\operatorname{Bild} A = \operatorname{span}\{a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}\}$. Da $a^{(1)} = 0$ ist und $a^{(2)}$, $a^{(3)}$ offensichtlich linear unabhängig sind, folgt

$$\operatorname{Bild} A = \operatorname{span}\{a^{(2)}, a^{(3)}\} = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = E.$$

und $\dim(\operatorname{Bild} A) = 2$.

Aufgabe 4

Sei $\mathcal{P}_2$ der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{F}$ von $\mathcal{P}_2$ in sich:

$$P(x) \in \mathcal{P}_2 \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad Q(x) = (2-x)\,P'(x) \in \mathcal{P}_2.$$

$\mathcal{F}$ ordnet jedem Polynom $P(x)$ das Polynom $Q(x) = (2-x)\,P'(x)$ zu ($P'(x)$ bedeutet die Ableitung von $P(x)$ nach x).

a) Zeigen Sie: $\mathcal{F}$ ist eine lineare Abbildung.

b) Durch welche Matrix A wird $\mathcal{F}$ bezüglich der Basis $1,\ x,\ x^2$ von $\mathcal{P}_2$ beschrieben?

a) Seien $P(x),\ Q(x) \in \mathcal{P}_2$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(P(x)+Q(x)) &= (2-x)\,(P(x)+Q(x))' = (2-x)\,\big(P'(x)+Q'(x)\big) \\
&= (2-x)\,P'(x) + (2-x)\,Q'(x) = \mathcal{F}(P(x)) + \mathcal{F}(Q(x)), \\
\mathcal{F}(\alpha\,P(x)) &= (2-x)\,(\alpha\,P(x))' = \alpha(2-x)\,P'(x) = \alpha\,\mathcal{F}(P(x)).
\end{aligned}$$

Daher ist $\mathcal{F}$ linear.

b) Wir betrachten die Basis $b^{(1)} = 1$, $b^{(2)} = x$, $b^{(3)} = x^2$ von $\mathcal{P}_2$. Wir suchen $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass

$$\mathcal{F}(b^{(j)}) = \sum_{k=1}^{3} a_{kj}\,b^{(k)}, \quad j = 1,2,3.$$

In Koordinaten:

$$\mathcal{F}\left(b^{(1)}\right) = \mathcal{F}(1) = (2-x)\cdot 0 = 0 \;\Rightarrow\; a^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{F}\left(b^{(2)}\right) = \mathcal{F}(x) = (2-x)\cdot 1 = 2-x \;\Rightarrow\; a^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{F}\left(b^{(3)}\right) = \mathcal{F}(x^2) = (2-x)\cdot 2x = 4x - 2x^2 \;\Rightarrow\; a^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = (a^{(1)}\,a^{(2)}\,a^{(3)}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$