

Serie 5

Aufgabe 1 ist online zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 12. April um 14:00 Uhr** ab.

Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder im entsprechenden Fach im **HG J 68**.

Aufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ☐ Die Abbildung $V^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $v \mapsto [v]_{\mathcal{B}}$, die jedem Vektor eines n -dimensionalen Vektorraumes seinen Koordinatenvektor bezüglich einer Basis \mathcal{B} zuordnet, ist linear.
- ☐ Bezüglich der Standardbasis e_1, e_2, e_3 im \mathbb{R}^3 ist die Orthogonalprojektion $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $x \mapsto \langle x, e_1 \rangle e_1$ gegeben durch die Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- ☐ Sei $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ linear. Dann existiert ein Vektor, der gleichzeitig im Kern und im Bild von \mathcal{F} liegt.
- ☐ Sei x eine Linearkombination von Spalten der Matrix A und y eine Lösung von $A^T y = 0$. Dann stehen x und y bezüglich des Standardskalarproduktes senkrecht aufeinander.
- ☐ Falls der Kern einer linearen Abbildung $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ nur aus dem Nullvektor besteht, so ist die Abbildung invertierbar.

Aufgabe 2

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie Basen für Kern A und Bild A .

Aufgabe 3

Wir betrachten die Ebene E in \mathbb{R}^3 , gegeben durch $x_1 = 0$, und die lineare Abbildung $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, die jedes $x \in \mathbb{R}^3$ orthogonal auf E projiziert.

- a) Durch welche Matrix A wird \mathcal{F} bezüglich der Standardbasis beschrieben?
- b) Bestimmen Sie Kern A und $\dim(\text{Kern } A)$.
- c) Bestimmen Sie Bild A und $\dim(\text{Bild } A)$.

Aufgabe 4

Sei \mathcal{P}_2 der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Betrachten Sie die folgende Abbildung \mathcal{F} von \mathcal{P}_2 in sich:

$$P(x) \in \mathcal{P}_2 \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad Q(x) = (2 - x) P'(x) \in \mathcal{P}_2.$$

\mathcal{F} ordnet jedem Polynom $P(x)$ das Polynom $Q(x) = (2 - x) P'(x)$ zu ($P'(x)$ bedeutet die Ableitung von $P(x)$ nach x).

- a) Zeigen Sie: \mathcal{F} ist eine lineare Abbildung.
- b) Durch welche Matrix A wird \mathcal{F} bezüglich der Basis $1, x, x^2$ von \mathcal{P}_2 beschrieben?