D-MAVT | Lineare Algebra II | FS 2013
Prof. Dr. N. Hungerbühler

Serie 11

Einsendeschluss: Freitag, der 24. Mai um 14:00 Uhr.

Aufgabe 1

Sind die folgenden Aussagen wahr?

◯ Die allgemeine Lösung von $y' = ay$ ist $y(x) = e^{ax}$.

$y(x) = e^{ax}$ ist eine spezielle Lösung von $y' = ay$. Für $c \in \mathbb{R}$ beliebig ist aber auch $y(x) = ce^{ax}$ eine Lösung. Die allgemeine Lösung von $y' = ay$ lautet daher nicht $y(x) = e^{ax}$, sondern $y(x) = ce^{ax}$.

√ ◯ Sind y_1 und y_2 Lösungen von $y''(x) = a(x)y(x) + b(x)y'(x)$, so ist auch jede Linearkombination von y_1 und y_2 eine Lösung.

Wenn y_1 und y_2 Lösungen von $y''(x) = a(x)y(x) + b(x)y'(x)$ sind, gilt

$$y_i''(x) = a(x)y_i(x) + b(x)y_i'(x)$$

für $i = 1, 2$. Daher folgt für eine beliebige Linearkombination $z = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ von y_1 und y_2

$$\begin{aligned} z''(x) &= \lambda_1 y_1''(x) + \lambda_2 y_2''(x) \\ &= \lambda_1(a(x)y_1(x) + b(x)y_1'(x)) + \lambda_2(a(x)y_2(x) + b(x)y_2'(x)) \\ &= a(x)(\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)) + b(x)(\lambda_1 y_1'(x) + \lambda_2 y_2'(x)) \\ &= a(x)z(x) + b(x)z'(x). \end{aligned}$$

Eine solche Linearkombination ist also auch eine Lösung.

Bemerkung: Daraus folgt insbesondere, dass die Lösungen von $y''(x) = a(x)y(x) + b(x)y'(x)$ einen Vektorraum bilden.

√ ◯ $\sin(\omega x)$ und $\cos(\omega x)$ sind Lösungen von $y'' + \omega^2 y = 0$.

Es gilt

$$(\sin(\omega x))'' = (\omega\cos(\omega x))' = -\omega^2 \sin(\omega x)$$

und

$$(\cos(\omega x))'' = (-\omega\sin(\omega x))' = -\omega^2\cos(\omega x).$$

Daher sind $\sin(\omega x)$ und $\cos(\omega x)$ Lösungen von $y'' + \omega^2 y = 0$.

√ ◯ $a\sinh(\omega x) + b\cosh(\omega x)$ ist die allgemeine Lösung von $y'' - \omega^2 y = 0$.

Es gilt

$$(\sinh(\omega x))'' = (\omega\cosh(\omega x))' = \omega^2\sinh(\omega x)$$

und

$$(\cos(\omega x))'' = (\omega\sinh(\omega x))' = \omega^2\cosh(\omega x).$$

Daher sind $\sinh(\omega x)$ und $\cosh(\omega x)$ Lösungen von $y'' - \omega^2 y = 0$. Da diese beiden Funktionen linear unabhängig sind und $y'' - \omega^2 y = 0$ eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, müssen diese Funktionen den Lösungsraum von $y'' - \omega^2 y = 0$ aufspannen. Die allgemeine Lösung lautet also tatsächlich

$$y(x) = a\sinh(\omega x) + b\cosh(\omega x).$$

√ ○ $ae^{\omega x} + be^{-\omega x}$ ist die allgemeine Lösung von $y'' - \omega^2 y = 0$.

Es gilt

$$(e^{\omega x})'' = (\omega e^{\omega x})' = \omega^2 e^{\omega x}$$

und

$$(e^{-\omega x})'' = (-\omega e^{-\omega x})' = \omega^2 e^{-\omega x}$$

Daher sind $e^{\omega x}$ und $e^{-\omega x}$ Lösungen von $y'' - \omega^2 y = 0$. Da diese beiden Funktionen linear unabhängig sind und $y'' - \omega^2 y = 0$ eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, müssen diese Funktionen den Lösungsraum von $y'' - \omega^2 y = 0$ aufspannen. Die allgemeine Lösung lautet also tatsächlich

$$y(x) = ae^{\omega x} + be^{-\omega x}.$$

Bemerkung: Mit $a = \frac{1}{2},\ b = -\frac{1}{2}$ bzw. $a = b = \frac{1}{2}$ erhält man die Lösungen $\sinh(\omega x)$ und $\cosh(\omega x)$, die wir in der vorherigen Frage gefunden haben (und ebenfalls den gesamten Lösungsraum aufspannen).