

Serie 2

Aufgaben 1 bis 3 sind online zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 8. März um 14:00 Uhr** ab.

Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder im entsprechenden Fach im **HG J 68**.

Aufgabe 1

Welche der folgenden Vektoren sind Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

- ☐ $(1, -2, 1)^\top$.
- ☐ $(0, 1, 1)^\top$.
- ☐ $(-2, 1, 1)^\top$.
- ☐ $(0, 3, 2)^\top$.
- ☐ $(1, 1, 1)^\top$.

Aufgabe 2

Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte ...

- ☐ -1 .
- ☐ 1 .
- ☐ i .
- ☐ $-i$.
- ☐ $1 - i$.

Aufgabe 3

Welche der folgenden Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_4 := \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} e^{-\frac{2\pi i}{3}} & e^{-\frac{2\pi i}{3}2} & e^{-\frac{2\pi i}{3}3} \\ e^{-\frac{2\pi i}{3}2} & e^{-\frac{2\pi i}{3}4} & e^{-\frac{2\pi i}{3}6} \\ e^{-\frac{2\pi i}{3}3} & e^{-\frac{2\pi i}{3}6} & e^{-\frac{2\pi i}{3}9} \end{pmatrix}$$

haben 0 als Eigenwert?

- ☐ A_1 .
- ☐ A_2 .
- ☐ A_3 .
- ☐ A_4 .
- ☐ Keine.

Aufgabe 4

Lösen Sie das Eigenwertproblem zu den folgenden Matrizen, d.h. bestimmen Sie alle Eigenwerte und ihre algebraischen Vielfachheiten, sowie die zugehörigen Eigenräume mit den geometrischen Vielfachheiten.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & A = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}, & \text{b)} & B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \\ \text{c)} & C = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -5 \\ -2 & 9 & 5 \\ 1 & -6 & -2 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Aufgabe 5

Geben Sie in MATLAB die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ein.

- a) Berechnen Sie mit MATLAB die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren.

Hinweis: $[V, D] = \text{eig}(A)$ gibt die Eigenwerte in der Diagonalen von D und die zugehörigen Eigenvektoren in den Spalten von V zurück.

- b) Lösen Sie mit MATLAB das Eigenwertproblem für A^{-1} , A^2 und A^3 . Was stellen Sie fest?
- c) Beweisen Sie nun, dass für eine beliebige $n \times n$ -Matrix M mit Eigenwert λ und zugehörigem Eigenvektor x folgendes gilt:
- λ^k ist ein Eigenwert von M^k ($k \in \mathbb{N}$) und x ein zugehöriger Eigenvektor.
 - Ist M invertierbar, so ist $1/\lambda$ ein Eigenwert von M^{-1} und x ein zugehöriger Eigenvektor.

Aufgabe 6

Für den skizzierten elektrischen Vierpol gilt zwischen Ein- und Ausgang die Beziehung

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

mit der Kettenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{R_2+R_3}{R_1+R_2+R_3} & \frac{R_3}{R_1} \\ \frac{R_2}{R_1 R_2} & \frac{R_1+R_3}{R_1} \end{pmatrix}.$$

Man berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren von A . Für welche Werte von $\frac{U_1}{I_1}$ hat man (bei beliebigem $I_1 \neq 0$) Widerstandsanpassung

$$\frac{U_2}{I_2} = \frac{U_1}{I_1}?$$

