Lösungen Serie 10

Aufgabe 1

Siehe separates `pdf`.

Aufgabe 2

Gegeben sind die quadratischen Formen im $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} Q(x) &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2, \\ q(x) &= x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3. \end{aligned}$$

a) Man schreibe die Formen in der Gestalt $x^\top Ax$ mit symmetrischer Matrix A.

b) Man berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren von A und führe die Hauptachsentransformation durch.

c) Sind Q und q positiv oder negativ (semi-)definit oder indefinit?

d) Sei $q_B(x) = x^\top Bx$ für eine nicht symmetrische Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Man bestimme eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ so, dass $q_B(x) = q_A(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Lösung von a)-c) für Q:

a) Es gilt

$$Q(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_1 = \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j = x^\top Ax$$

für $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

b) Wir bestimmen zuerst die Eigenwerte von A mit Entwicklung der Determinante nach der dritten Zeile:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = -(\lambda-3)^2(\lambda-1) \overset{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Die Matrix A hat somit den Eigenwert $\lambda_1 = 3$ mit algebraischer Vielfachheit 2 und den Eigenwert $\lambda_2 = 1$ mit algebraischer Vielfachheit 1.

Die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$ sind gegeben durch

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Also ist zum Beispiel $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von E_3.

Die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = 1$ sind gegeben durch

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

also gilt $E_1 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Für die Hauptachsentransformation brauchen wir eine orthonormale Eigenbasis $\{t^{(1)}, t^{(2)}, t^{(3)}\}$ von A. Da die oben gefundenen Basisvektoren von E_3 und E_1 bereits senkrecht aufeinander stehen, brauchen wir sie nur zu normieren:

$$\begin{aligned} t^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \\ t^{(2)} &= \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \\ t^{(3)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit gilt $T^\top AT = \begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ für $T = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\end{pmatrix}$. Die Hauptachsentransformation $x = Ty$ liefert also

$$Q(x) = x^\top Ax = y^\top T^\top ATy = 3y_1^2 + 3y_2^2 + y_3^2.$$

c) Die Rechnung bei b) hat gezeigt, dass A nur positive Eigenwerte hat. Somit ist Q positiv definit.

Lösung von a)-c) für q:

a) Es gilt

$$q(x) = \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_1x_3 + \frac{1}{2}x_2x_1 + \frac{1}{2}x_2x_3 + \frac{1}{2}x_3x_1 + \frac{1}{2}x_3x_2 = \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j = x^\top Ax$$

für $A = \begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$.

b) Wir bestimmen zuerst die Eigenwerte von A mit Entwicklung der Determinante nach der ersten Zeile:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \det\begin{pmatrix}-\lambda&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\lambda&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\lambda\end{pmatrix} \\ &= -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{\lambda}{2}\right) \\ &= -\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\left(\lambda\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) \\ &= -\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\right) = -\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2(\lambda - 1) \overset{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Die Matrix A hat somit den Eigenwert $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ mit algebraischer Vielfachheit 2 und den Eigenwert $\lambda_2 = 1$ mit algebraischer Vielfachheit 1.
Die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ sind gegeben durch

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right).$$

Also ist zum Beispiel $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von $E_{-\frac{1}{2}}$.

Die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = 1$ sind gegeben durch

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & 0 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Also gilt $E_1 = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Für die Hauptachsentransformation brauchen wir eine orthonormale Eigenbasis $\{t^{(1)}, t^{(2)}, t^{(3)}\}$ von A. Da E_1 und $E_{-\frac{1}{2}}$ senkrecht aufeinander stehen (wegen der Symmetrie von A), finden wir $t^{(1)}$ und $t^{(2)}$ durch Anwendung von Gram-Schmidt auf die obige Basis von $E_{-\frac{1}{2}}$ und $t^{(3)}$ durch Normierung des obigen Basisvektors von E_1:

$$\begin{aligned} t^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ t'^{(2)} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \\ t^{(2)} &= \frac{t'^{(2)}}{\|t'^{(2)}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ t^{(3)} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit gilt $T^\top AT = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ für $T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$. Die Hauptachsentransformation $x = Ty$ liefert also

$$q(x) = x^\top Ax = y^\top T^\top ATy = -\frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + y_3^2.$$

c) Die Rechnung bei b) hat gezeigt, dass A sowohl positive als auch negative Eigenwerte hat. Somit ist q indefinit.

Lösung von d):

Es gilt $q_B(x) = x^\top Bx = \sum_{i,j} b_{ij}x_ix_j$. Diese Summe besteht aus quadratischen Termen $b_{ii}x_i^2$ und Mischtermen $b_{ij}x_ix_j$ für $i \neq j$. Wegen $x_ix_j = x_jx_i$ können wir jeweils zwei Mischterme zusammenfassen:

$$q_B(x) = \sum_i b_{ii}x_i^2 + \sum_{i<j} (b_{ij} + b_{ji})x_ix_j.$$

Um nun $q_B(x)$ in die Form $x^\top Ax$ für eine symmetrische Matrix A zu bringen, teilen wir die zusammengefassten Mischterme wieder auf:

$$(b_{ij} + b_{ji})x_ix_j = \frac{b_{ij} + b_{ji}}{2}x_ix_j + \frac{b_{ji} + b_{ij}}{2}x_jx_i.$$

Das ergibt

$$q_B(x) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} x_i^2 + \sum_{i \neq j} \frac{b_{ij} + b_{ji}}{2} x_i x_j = \sum_{i,j} \frac{b_{ij} + b_{ji}}{2} x_i x_j = x^\top A x,$$

für $A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = \frac{b_{ij}+b_{ji}}{2}$, also $A = \frac{1}{2}(B + B^\top)$.

Aufgabe 3

Man bestimme durch Hauptachsentransformation und Translation die Normalform der Quadrik

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 - 6(x_1 + x_2 + x_3) + 9 = 0\}.$$

Wie lautet die zugehörige Koordinatentransformation?

Die Quadrik Q ist gegeben durch $x^\top Ax + a^\top x + 9 = 0$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \ a = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen zuerst die Eigenwerte von A durch Entwicklung der Determinante nach der ersten Zeile:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 6) + 1 \cdot (\lambda - 3) + 2(2\lambda - 6) \\ &= (\lambda - 3)\big((2-\lambda)(\lambda + 2) + 1 + 4\big) \\ &= (\lambda - 3)(-\lambda^2 + 9) = -(\lambda - 3)^2(\lambda + 3) \overset{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Die Matrix A hat somit den Eigenwert $\lambda_1 = 3$ mit algebraischer Vielfachheit 2 und den Eigenwert $\lambda_2 = -3$ mit algebraischer Vielfachheit 1.
Die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$ sind gegeben durch

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Also ist zum Beispiel $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von E_3.
Die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = -3$ sind gegeben durch

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -2 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 24 & 12 & 0 \\ 0 & 12 & 6 & 0 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Also gilt $E_{-3} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.
Für die Hauptachsentransformation brauchen wir eine orthonormale Eigenbasis $\{t^{(1)}, t^{(2)}, t^{(3)}\}$ von A. Da E_3 und E_{-3} senkrecht aufeinander stehen (wegen der Symmetrie von A), finden wir $t^{(1)}$ und $t^{(2)}$ durch Anwendung von Gram-Schmidt auf die

obige Basis von E_3 und $t^{(3)}$ durch Normierung des obigen Basisvektors von E_{-3}:

$$\begin{aligned}
t^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \\
t'^{(2)} &= \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \\
t^{(2)} &= \frac{t'^{(2)}}{\|t'^{(2)}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \\
t^{(3)} &= \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Somit gilt $T^\top AT = \begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$ für $T = \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$. Die Hauptachsentransformation $x = Ty$ liefert also

$$\begin{aligned}
x^\top Ax + a^\top x + 9 &= y^\top T^\top ATy + (-6,-6,-6)Ty + 9 \\
&= 3y_1^2 + 3y_2^2 - 3y_3^2 - 6\sqrt{3}y_2 + 9.
\end{aligned}$$

Schliesslich bringen wir die linearen Terme zum Verschwinden durch quadratisches Ergänzen:

$$\begin{aligned}
3y_1^2 + 3y_2^2 - 3y_3^2 - 6\sqrt{3}y_2 + 9 &= 3y_1^2 + 3(y_2 - \sqrt{3})^2 - 9 - 3y_3^2 + 9 \\
&= 3y_1^2 + 3(y_2 - \sqrt{3})^2 - 3y_3^2.
\end{aligned}$$

Nach der Translation $z = y + c$ für $c = (0, -\sqrt{3}, 0)^\top$ ist somit Q durch die Normalform

$$z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 = 0$$

gegeben. Es handelt sich somit um einen geraden (Doppel)kegel mit der z_3-Achse als Achse und Mittelpunkt im Ursprung des z-Systems.
Die zugehörige Koordinatentransformation lautet $z = y + c = T^\top x + c$, also

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-x_1 + x_2), \\
z_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 + x_2 + x_3) - \sqrt{3}, \\
z_3 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(-x_1 - x_2 + 2x_3).
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Man finde die kritischen Punkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto -12x + 5x^3 - 12y + 3x^2y + 3xy^2 + 5y^3$$

und bestimme, ob es sich dabei um lokale Maxima oder Minima oder Sattelpunkte handelt.
Hinweis: Man wende das Hurwitz-Kriterium auf die Hessesche Matrix an.

Die kritischen Punkte von f sind durch $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ gegeben, erfüllen also die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= -12 + 15x^2 + 6xy + 3y^2 \stackrel{!}{=} 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -12 + 3x^2 + 6xy + 15y^2 \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Subtraktion der zweiten von der ersten Gleichung liefert

$$12x^2 - 12y^2 = 0,$$

also

$$(x - y)(x + y) = 0.$$

Die kritischen Punkte erfüllen somit $x = y$ oder $x = -y$.
Im Fall $x = y$ lauten die beiden obigen Gleichungen $24x^2 - 12 = 0$, bzw. äquivalent dazu $x^2 = \frac{1}{2}$, sie haben also die Lösungen

$$x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Im Fall $x = -y$ lauten die beiden obigen Gleichungen $12x^2 - 12 = 0$, bzw. äquivalent dazu $x^2 = 1$, sie haben also die Lösungen

$$x = -y = \pm 1.$$

Die kritischen Punkte von f sind somit $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$.
Weiteres Ableiten liefert die Einträge der Hesseschen Matrix:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= 30x + 6y, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= 6x + 6y, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= 6x + 30y. \end{aligned}$$

Im kritischen Punkt $p_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ lautet die Hessesche Matrix somit

$$H_f(p_1) = \begin{pmatrix} 18\sqrt{2} & 6\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} & 18\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\det H_f(p_1) = 2 \cdot 18^2 - 2 \cdot 6^2 > 0$ und $(H_f(p_1))_{11} > 0$. Nach dem Hurwitz-Kriterium ist $H_f(p_1)$ also positiv definit und f besitzt in p_1 ein lokales Minimum.
Im kritischen Punkt $p_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ lautet die Hessesche Matrix

$$H_f(p_2) = \begin{pmatrix} -18\sqrt{2} & -6\sqrt{2} \\ -6\sqrt{2} & -18\sqrt{2} \end{pmatrix} = -H_f(p_1).$$

Da $H_f(p_1)$ positiv definit ist und $H_f(p_2) = -H_f(p_1)$ gilt, ist $H_f(p_2)$ negativ definit und f besitzt in p_2 ein lokales Maximum.
Im kritischen Punkt $p_3 = (1, -1)$ lautet die Hessesche Matrix

$$H_f(p_3) = \begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 0 & -24 \end{pmatrix}.$$

Sie hat also den positiven Eigenwert 24 und den negativen Eigenwert -24 und ist indefinit. Der kritische Punkt p_3 ist daher ein Sattelpunkt von f.
Im kritischen Punkt $p_4 = (-1, 1)$ lautet die Hessesche Matrix

$$H_f(p_4) = \begin{pmatrix} -24 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}.$$

Sie hat also wiederum den positiven Eigenwert 24 und den negativen Eigenwert -24 und ist indefinit. Der kritische Punkt p_4 ist daher auch ein Sattelpunkt von f.