

## Serie 10

Aufgabe 1 ist online zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 17. Mai um 14:00 Uhr** ab.

Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder im entsprechenden Fach im **HG J 68**.

---

### Aufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- ☐  $x^2 + xy + 3y^2$  ist eine quadratische Form.
- ☐  $x^2 + y$  ist eine quadratische Form.
- ☐  $2x_1x_2$  wird durch die Hauptachsentransformation  $y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)$ ,  $y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2)$  zur rein quadratischen Form  $y_1^2 - y_2^2$ .
- ☐  $2x_1x_2 = 1$  stellt eine Hyperbel dar.
- ☐  $2x_1x_2$  ist eine positiv definite quadratische Form.

### Aufgabe 2

Gegeben sind die quadratischen Formen im  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} Q(x) &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2, \\ q(x) &= x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3. \end{aligned}$$

- a) Man schreibe die Formen in der Gestalt  $x^\top Ax$  mit symmetrischer Matrix  $A$ .
- b) Man berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren von  $A$  und führe die Hauptachsentransformation durch.
- c) Sind  $Q$  und  $q$  positiv oder negativ (semi-)definit oder indefinit?
- d) Sei  $q_B(x) = x^\top Bx$  für eine nicht symmetrische Matrix  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Man bestimme eine symmetrische Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  so, dass  $q_B(x) = q_A(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ .

### Aufgabe 3

Man bestimme durch Hauptachsentransformation und Translation die Normalform der Quadrik

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 - 6(x_1 + x_2 + x_3) + 9 = 0\}.$$

Wie lautet die zugehörige Koordinatentransformation?

### Aufgabe 4

Man finde die kritischen Punkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto -12x + 5x^3 - 12y + 3x^2y + 3xy^2 + 5y^3$$

und bestimme, ob es sich dabei um lokale Maxima oder Minima oder Sattelpunkte handelt.

*Hinweis:* Man wende das Hurwitz-Kriterium auf die Hessesche Matrix an.