Lösungen Serie 9

Aufgabe 1

Siehe separates `pdf`.

Aufgabe 2

a) Sei $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Man berechne e^A.

   Bemerkung: Die Diagonalisierung von A aus der Vorlesung darf direkt benutzt werden.

b) Man bestimme das charakteristische Polynom p_A von A und berechne $p_A(A)$. Man erkläre die Beobachtung.

   Bemerkung: Die Beobachtung gilt für beliebige (auch nicht diagonalisierbare) quadratische Matrizen.

c) Man benutze b) um A^{-1} zu berechnen.

d) Man benutze die geometrische Reihe $(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, um die Inverse der Matrix

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   zu berechnen.

a) In der Vorlesung haben wir gesehen, dass A die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 8$ hat und

$$E_2 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad E_8 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

gilt. Daher gilt $T^{-1}AT = \operatorname{diag}(2,2,8)$ für

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und nach der Formel aus der Vorlesung

$$e^A = T\operatorname{diag}(e^2, e^2, e^8)T^{-1}.$$

Zum Beispiel mit dem Gaussverfahren finden wir

$$T^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} e^A &= T\operatorname{diag}(e^2, e^2, e^8)T^{-1} = \begin{pmatrix} -e^2 & -e^2 & e^8 \\ 0 & e^2 & e^8 \\ e^2 & 0 & e^8 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2e^2+e^8 & -e^2+e^8 & -e^2+e^8 \\ -e^2+e^8 & 2e^2+e^8 & -e^2+e^8 \\ -e^2+e^8 & -e^2+e^8 & 2e^2+e^8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) Wir bestimmen das charakteristische Polynom p_A von A durch Entwicklung der Determinante nach der 1. Zeile:

$$\begin{aligned}
p_A(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (4-\lambda)\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} 2 & 4-\lambda \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\
&= -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda + 32.
\end{aligned}$$

Rechnen ergibt nun

$$A^2 = \begin{pmatrix} 24 & 20 & 20 \\ 20 & 24 & 20 \\ 20 & 20 & 24 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 176 & 168 & 168 \\ 168 & 176 & 168 \\ 168 & 168 & 176 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned}
p_A(A) &= -A^3 + 12A^2 - 36A + 32I_3 \\
&= -\begin{pmatrix} 176 & 168 & 168 \\ 168 & 176 & 168 \\ 168 & 168 & 176 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 288 & 240 & 240 \\ 240 & 288 & 240 \\ 240 & 240 & 288 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 144 & 72 & 72 \\ 72 & 144 & 72 \\ 72 & 72 & 144 \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Erklärung des Resultats: Nach der Formel aus der Vorlesung und der Diagonalisierung aus a) gilt

$$p_A(A) = T\operatorname{diag}(p_A(2), p_A(2), p_A(8))T^{-1}.$$

Da die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 8$ aber gerade die Nullstellen von p_A sind, folgt daraus $p_A(A) = 0$.

c) Nach b) gilt $0 = p_A(A) = -A^3 + 12A^2 - 36A + 32I_3$. Daraus folgt

$$I_3 = \frac{1}{32}(A^3 - 12A^2 + 36A) = A \cdot \left(\frac{1}{32}A^2 - \frac{3}{8}A + \frac{9}{8}I_3\right),$$

also

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= \frac{1}{32}A^2 - \frac{3}{8}A + \frac{9}{8}I_3 \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{5}{8} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{9}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

d) Die Matrix X ist von der Form $X = I_4 - Y$ mit

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Durch Rechnen erhalten wir die Potenzen

$$Y^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -x^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alle höheren Potenzen verschwinden: $Y^n = 0$ für $n \geq 4$. Die Formel für die geometrische Reihe angewendet auf Y ergibt daher

$$X^{-1} = (1 - Y)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} Y^n = I_4 + Y + Y^2 + Y^3$$

(man beachte, dass diese geometrische Reihe konvergiert, weil alle genügend hohen Potenzen von Y verschwinden). Es folgt also

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x & x^2 & -x^3 \\ 0 & 1 & -x & x^2 \\ 0 & 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

a) Berechnen Sie für die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ die Operatornormen $\|A\|$ und $\|A^{-1}\|$ mit Hilfe von MATLAB (ohne die Funktion `norm(·)` zu benutzen).

Hinweis: Für $\|A^{-1}\|$ benutze man folgende Formeln (vgl. S. 165 im Buch von Nipp/Stoffer):

$$\|A^{-1}\| = \frac{1}{\sqrt{\min_{1\le i\le n}\{\mu_i\}}}$$

für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar, wobei μ_i die Eigenwerte der symmetrischen Matrix $A^\top A$ sind, und

$$\|A^{-1}\| = \frac{1}{\min_{1\le i\le n}\{|\lambda_i|\}}$$

für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar und symmetrisch, wobei λ_i die Eigenwerte von A sind.

b) Sei M die symmetrische Matrix $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 17 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\|M\|$ und $\|M^{-1}\|$ mit Hilfe von MATLAB (ohne die Funktion `norm(·)` zu benutzen).

c) Vergleichen Sie die Resultate von a) und b) mit dem Ergebnis der MATLAB-Funktion `norm(·)`.

a) Da A nicht symmetrisch ist, müssen wir die Eigenwerte μ_i von $A^\top A$ berechnen und die Formeln

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sqrt{\max_{1\le i\le n}\{\mu_i\}}, \\ \|A^{-1}\| &= \frac{1}{\sqrt{\min_{1\le i\le n}\{\mu_i\}}} \end{aligned}$$

benutzen. Rechnung: siehe c).

b) Da M symmetrisch ist, können wir hier die Formeln

$$\begin{aligned} \|M\| &= \max_{1\le i\le n}\{|\lambda_i|\}, \\ \|M^{-1}\| &= \frac{1}{\min_{1\le i\le n}\{|\lambda_i|\}} \end{aligned}$$

benutzen, wobei λ_i die Eigenwerte von M sind. Man beachte, dass $M = A^\top A$ gilt und wir daher die Eigenwerte aus a) verwenden können. Rechnung: siehe c).

c)
```
%Aufgabenteil a)
A=[-1 3 0;
0 2 0;
1 2 -1];
% Eigenwerte von A'*A berechnen
d=eig(A'*A);

% Groesster Eigenwert von A'*A
maxEW = max(d);
% Kleinster Eigenwert von A'*A
```

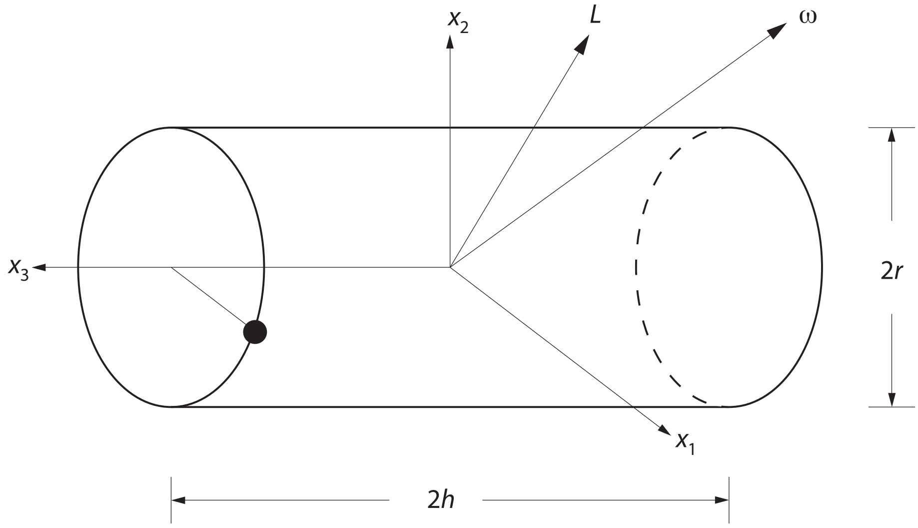
```
minEW = min(d);

% Operatornorm von A
normA = sqrt(maxEW)

% Operatornorm von A^-1
norminvA = 1/sqrt(minEW)

%MATLAB output
%normA = 4.1588
%norminvA = 3.3630


%Aufgabenteil b)
M=[2 -1 -1;
-1 17 -2;
-1 -2 1];
% Bemerkung: M = A'*A in diesem Fall, daher koennen wir die in d
% abgespeicherten Eigenwerte benutzen

% Betragsmaessig groesster Eigenwert
maxabsEW = max(abs(d));
% Betragsmaessig kleinster Eigenwert
minabsEW = min(abs(d));

% Operatornorm von M
normM = maxabsEW

% Operatornorm von M^-1
norminvM = 1/minabsEW

%MATLAB output
%normM = 17.2960
%norminvM = 11.3099


%Aufgabeteil c)
%Vergleiche mit MATLAB-Funktion norm
norm(A)
norm(inv(A))
norm(M)
norm(inv(M))

%MATLAB output
%ans = 4.1588
%ans = 3.3630
%ans = 17.2960
%ans = 11.3099
```

Aufgabe 4

Eine zylindrische Schwungscheibe ($r = h = 30$ cm, Masse $M = 1$ kg) hat am Rand eine punktförmige Unwucht der Masse $m = 0.1$ kg. In dem körperfesten skizzierten Koordinatensystem lautet der Trägheitstensor

$$\Theta = \begin{pmatrix} \frac{M}{12}(3r^2 + 4h^2) + mh^2 & 0 & -mrh \\ 0 & \frac{M}{12}(3r^2 + 4h^2) + m(h^2 + r^2) & 0 \\ -mrh & 0 & \frac{M}{2}r^2 + mr^2 \end{pmatrix}.$$

Rotiert die Scheibe mit dem (momentanen) Drehgeschwindigkeitsvektor ω, so besitzt sie den Drehimpuls $L = \Theta\omega$ und die Rotationsenergie $E = \frac{1}{2}\omega^\top\Theta\omega$. Bei der freien Bewegung ist L konstant und ω rotiert um L (Nutation).



a) Man berechne Θ, L und E für $\omega = e_3$ (mit ω in der Einheit s^{-1}).

b) Man bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren von Θ (Hauptträgheitsmomente und Hauptträgheitsachsen).

c) Für welche Richtungen der Drehachse ω, $|\omega| = 1$, wird die Rotationsenergie maximal respektive minimal (permanente Drehungen ohne Nutation um stabile Achsen)? Man zeige die Existenz von zwei stabilen Achsen experimentell bei einem in die Luft geworfenen Buch (man lege ein Gummiband um das Buch, damit es nicht aufgeht).

Der Einfachheit halber rechnen wir mit reinen Zahlenwerten, in der Tat meinen wir damit aber die entsprechenden Werte in den Einheiten $\mathrm{kg\,cm^2}$ (Trägheitsmoment), $\mathrm{kg\,cm^2/s}$ (Drehimpuls) und $\mathrm{kg\,cm^2/s^2} = 10^{-4}$ J (Rotationsenergie).

a) Einsetzen der gegebenen Werte ergibt den Trägheitstensor

$$\Theta = \begin{pmatrix} 615 & 0 & -90 \\ 0 & 705 & 0 \\ -90 & 0 & 540 \end{pmatrix},$$

den Drehimpuls

$$L = \Theta\omega = \begin{pmatrix} -90 \\ 0 \\ 540 \end{pmatrix}$$

und die Rotationsenergie

$$E = \frac{1}{2}\omega^\top \Theta \omega = \frac{1}{2}\omega^\top L = 270.$$

b) Mit Entwicklung der Determinante nach der zweiten Zeile folgt

$$\begin{aligned} \det(\Theta - \lambda I_3) &= \det \begin{pmatrix} 615-\lambda & 0 & -90 \\ 0 & 705-\lambda & 0 \\ -90 & 0 & 540-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (705-\lambda)((615-\lambda)(540-\lambda)-90^2) \\ &= (705-\lambda)(\lambda^2 - 1155\lambda + 324000). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von Θ (Hauptträgheitsmomente) sind somit gegeben durch $\lambda_1 = 705$ und die Nullstellen $\lambda_2 = 675$ und $\lambda_3 = 480$ von $\lambda^2 - 1155\lambda + 324000$. Da diese Eigenwerte verschieden sind, ist deren algebraische und geometrische Vielfachheit 1. Dazugehörige Eigenvektoren (Hauptträgheitsachsen):

$\underline{\lambda_1 = 705}$: Klarerweise ist e_2 ein Eigenvektor zum Eigenwert 705. Da die geometrische Vielfachheit 1 ist, gilt

$$E_{705} = \operatorname{span}\{e_2\}.$$

$\underline{\lambda_2 = 675}$: Die Eigenvektoren zum Eigenwert λ_2 sind gegeben durch

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -60 & 0 & -90 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 0 \\ -90 & 0 & -135 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Es gilt also

$$E_{675} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}.$$

$\underline{\lambda_2 = 480}$: Die Eigenvektoren zum Eigenwert λ_3 sind gegeben durch

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 135 & 0 & -90 & 0 \\ 0 & 225 & 0 & 0 \\ -90 & 0 & 60 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Es gilt also

$$E_{480} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}.$$

c) Da Θ symmetrisch ist, gibt es eine orthogonale Matrix T, so dass

$$T^{-1}\Theta T = T^\top \Theta T = \operatorname{diag}(705, 675, 480)$$

gilt. In den Spalten von T stehen die Vektoren einer orthonormierten Eigenbasis, nach unserem Resultat aus b) können wir also

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$$

wählen. Für die neuen Koordinaten $\omega' := T^\top \omega = T^{-1}\omega$ gilt somit

$$2E = \omega^\top \Theta \omega = (T\omega')^\top \Theta T \omega' = \omega'^\top (T^\top \Theta T)\omega' = 705{\omega_1'}^2 + 675{\omega_2'}^2 + 480{\omega_3'}^2.$$

Man beachte nun, dass $|\omega| = 1$ äquivalent zu $|\omega'| = 1$ ist wegen der Orthogonalität von T. Somit gilt

$$\max_{|\omega|=1} E = \max_{|\omega'|=1} E = \frac{705}{2}$$

und

$$\min_{|\omega|=1} E = \min_{|\omega'|=1} E = 240,$$

wobei das Maximum für $\omega' = \pm e_1$ und das Minimum für $\omega' = \pm e_3$ angenommen wird. Somit ist die Rotationsenergie für die Drehachse $\omega = \pm Te_1 = \pm e_2$ maximal (d.h. wenn ω die Hauptträgheitsachse zum grössten Hauptträgheitsmoment ist) und für die Drehachse $\omega = \pm Te_3 = \pm \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} \\ 0 \\ \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$ minimal (d.h. wenn ω die Hauptträgheitsachse zum kleinsten Hauptträgheitsmoment ist).