D-MAVT | Lineare Algebra II | FS 2013
Prof. Dr. N. Hungerbühler

MC-Fragen Serie 2

Einsendeschluss: Freitag, der 8. März um 14:00 Uhr.

Aufgabe 1

Welche der folgenden Vektoren sind Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

√ ○ $(1, -2, 1)^\top$.

Ein Vektor $v \neq 0$ ist Eigenvektor von $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, falls Av ein skalares Vielfaches von v ist, d.h. wenn ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $Av = \lambda v$ existiert. Rechnen ergibt $A \cdot (1, -2, 1)^\top = (-1, 2, -1)^\top = -1 \cdot (1, -2, 1)^\top$.

○ $(0, 1, 1)^\top$.

$A \cdot (0, 1, 1)^\top = (1, 1, 2)^\top \neq \lambda(0, 1, 1)^\top, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

○ $(-2, 1, 1)^\top$.

$A \cdot (-2, 1, 1)^\top = (-1, -1, 2)^\top$.

○ $(0, 3, 2)^\top$.

$A \cdot (0, 3, 2)^\top = (3, 2, 5)^\top$.

√ ○ $(1, 1, 1)^\top$.

$A \cdot (1, 1, 1)^\top = (2, 2, 2)^\top = 2 \cdot (1, 1, 1)^\top$.

Somit sind $(1, -2, 1)^\top$ und $(1, 1, 1)^\top$ Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten -1 und 2 - die anderen drei Vektoren sind keine Eigenvektoren von A.

Aufgabe 2

Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte ...

- ◯ -1.
- $\checkmark$ ◯ 1.
- $\checkmark$ ◯ i.
- $\checkmark$ ◯ $-i$.
- ◯ $1 - i$.

Wir bestimmen die Eigenwerte mit Entwicklung der Determinante nach der dritten Zeile:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2+1) \stackrel{!}{=} 0.$$

Wir erhalten also $\lambda_1 = 1$ und die Nullstellen $\lambda_{2,3} = \pm i$ von $\lambda^2 + 1$ als Eigenwerte.

Aufgabe 3

Welche der folgenden Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_4 := \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} e^{-\frac{2\pi i}{3}} & e^{-\frac{2\pi i}{3}2} & e^{-\frac{2\pi i}{3}3} \\ e^{-\frac{2\pi i}{3}2} & e^{-\frac{2\pi i}{3}4} & e^{-\frac{2\pi i}{3}6} \\ e^{-\frac{2\pi i}{3}3} & e^{-\frac{2\pi i}{3}6} & e^{-\frac{2\pi i}{3}9} \end{pmatrix}$$

haben 0 als Eigenwert?

√ ◯ A_1.

◯ A_2.

√ ◯ A_3.

◯ A_4.

◯ Keine.

Eine Matrix A hat genau dann 0 als Eigenwert, wenn das Gleichungssystem $Ax = 0$ eine nicht-triviale Lösung hat. Wir wenden also das Gaussverfahren auf die gegebenen Matrizen an:

$$A_1 \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A_2 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ (bereits in Zeilenstufenform).}$$

$$\sqrt{3}A_4 = \begin{pmatrix} e^{-\frac{2\pi i}{3}} & e^{\frac{2\pi i}{3}} & 1 \\ e^{\frac{2\pi i}{3}} & e^{-\frac{2\pi i}{3}} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{-\frac{2\pi i}{3}} & e^{\frac{2\pi i}{3}} & 1 \\ e^{\frac{2\pi i}{3}} & e^{-\frac{2\pi i}{3}} & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & e^{\frac{2\pi i}{3}} - e^{-\frac{2\pi i}{3}} & 1 - e^{-\frac{2\pi i}{3}} \\ 0 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} - e^{\frac{2\pi i}{3}} & 1 - e^{\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & e^{\frac{2\pi i}{3}} - e^{-\frac{2\pi i}{3}} & 1 - e^{-\frac{2\pi i}{3}} \\ 0 & 0 & 2 - e^{\frac{2\pi i}{3}} - e^{-\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{3}i & 1 - e^{-\frac{2\pi i}{3}} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dabei haben wir die Formeln $e^{2\pi i} = 1$ sowie $e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$ und $e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin x$ verwendet.

Somit haben die Gleichungssysteme $A_1x = 0$, $A_3x = 0$ eine nicht-triviale Lösung und die Gleichungssysteme $A_2x = 0$, $A_4x = 0$ nur die triviale Lösung. Also ist 0 ein Eigenwert von A_1 und A_3, aber nicht von A_2 und A_4.