Serie 12

Einsendeschluss: Freitag, der 31. Mai um 14:00 Uhr.

Diese Serie ist fakultativ.

Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie die Dimension des Lösungsraums des folgenden Differentialgleichungssystems!

$$\begin{aligned} y_1'' &= y_1 + y_2' \\ y_2''' &= y_1' \end{aligned}$$

○ 2

○ 3

√ ○ 5

○ 6

Das gegebene Differentialgleichungssystem kann durch die Substitution

$$Z := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \\ y_2 \\ y_2' \\ y_2'' \end{pmatrix}$$

auf das System 1. Ordnung

$$Z' = AZ$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$$

zurückgeführt werden. Nach einem Satz aus der Vorlesung hat der Lösungsraum dieses System die Dimension 5. Daher hat auch der Lösungsraum des gegebenen Differentialgleichungssystems die Dimension 5.

b) Für die Wronski-Determinante W zweier reeller Funktionen ϕ_1, ϕ_2 gelte $W(0) = 1$ und $W(1) = -1$. Jemand behauptet, (ϕ_1, ϕ_2) sei die Basis des Lösungsraums einer homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung. Kann diese Behauptung zutreffen?

○ Ja.

√ ○ Nein.

Falls ϕ_1 und ϕ_2 eine Basis des Lösungsraums einer homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung bilden, dann ist nach einem Satz aus der Vorlesung die Wronski-Determinante $W(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Da in diesem Fall ϕ_1, ϕ_1', ϕ_2 und ϕ_2' als differenzierbare Funktionen alle stetig sind, ist auch W eine stetige Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Darum impliziert $W(0) = 1$ und $W(1) = -1$ mit dem Zwischenwertsatz die Existenz eines $x \in]0, 1[$ mit $W(x) = 0$. Dies ist ein Widerspruch zu $W(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Somit können ϕ_1 und ϕ_2 keine Basis des Lösungsraums einer homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung sein.

c) Seien S_I und S_H die Lösungsräume einer linearen, (echt) inhomogenen und der dazugehörigen homogenen Differentialgleichung. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

√ ○ $S_H \cap S_I$ ist leer.

○ $S_H \cap S_I = \{0\}$.

○ $S_H \cap S_I$ ist ein Vektorraum.

Eine echt inhomogene lineare Differentialgleichung ist von der Form

$$y^{(n)} = a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_{n-1} y^{(n-1)} + f,$$

wobei $a_i = a_i(x)$ und $f = f(x)$ stetige Funktionen sind und f nicht die Nullfunktion ist. Für eine Lösung $y = y(x)$ einer solchen Differentialgleichung gilt

$$y^{(n)} \neq a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_{n-1} y^{(n-1)},$$

weil f nicht die Nullfunktion ist, d.h. y ist keine Lösung der dazugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$y^{(n)} = a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_{n-1} y^{(n-1)}.$$

Es gibt also keine Funktionen, die gleichzeitig Lösung einer echt inhomogenen linearen und der dazugehörigen homogenen Differentialgleichung sind. Somit ist $S_H \cap S_I$ leer. Daher ist $S_H \cap S_I$ verschieden von $\{0\}$ und auch kein Vektorraum, weil Vektorräume nach Definition nicht leer sind.