Lösungen Serie 12

Aufgabe 1

Siehe separates `pdf`.

Aufgabe 2

a) Man verwandle das lineare System zweiter Ordnung für die Funktionen $y(x)$ und $z(x)$

$$\begin{aligned} y'' &= xy + y' + e^x z \\ z'' &= y - x^2 y' + \sin(x) z' \end{aligned}$$

in ein lineares System 1. Ordnung.

b) Welche Dimension hat der Lösungsraum?

a) Das gegebene System ist äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ z' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & e^x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -x^2 & 0 & \sin(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ z \\ z' \end{pmatrix}.$$

Dies ist ein lineares System 1. Ordnung $Y' = AY$ mit

$$Y := \begin{pmatrix} y \\ y' \\ z \\ z' \end{pmatrix}, \ A = A(x) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & e^x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -x^2 & 0 & \sin(x) \end{pmatrix}.$$

b) Weil dies ein homogenes lineares System 1. Ordnung von 4 Differentialgleichungen ist, hat der Lösungsraum nach einem Satz aus der Vorlesung die Dimension 4.

Aufgabe 3

Der angeregte harmonische Oszillator:

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

beschreibt einen periodisch angeregten harmonischen Oszillator mit der Grundfrequenz $\omega \neq 1$ und $\omega \neq 0$.

a) Man bestimme eine Basis des Lösungsraums des homogenen Systems.
Hinweis: Siehe Folien zur Vorlesung vom 2. Mai.

b) Man bestimme eine partikuläre Lösung.
Hinweis: Ansatz $Y(t) = c \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$.

c) Man bestimme die allgemeine Lösung des angeregten Systems.

a) Das dazugehörige homogene System ist gegeben durch $Y' = AY$ für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von A sind gegeben durch

$$\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 + \omega^2 \stackrel{!}{=} 0,$$

also durch $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. Die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = i\omega$ sind gegeben durch

$$\left(\begin{array}{cc|c} -i\omega & 1 & 0 \\ -\omega^2 & -i\omega & 0 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{cc|c} \omega & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

also ist $v_1 = \begin{pmatrix} -i \\ \omega \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zu $\lambda_1 = i\omega$. Daraus folgt mit komplexer Konjugation, dass $v_2 = \begin{pmatrix} i \\ \omega \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zu $\lambda_2 = -i\omega$ ist.

Die Funktionen $\phi_1(t) := e^{\lambda_1 t} v_1$ und $\phi_2(t) := e^{\lambda_2 t} v_2$ sind Lösungen des homogenen Systems, weil für $i = 1, 2$

$$\phi_i'(t) = e^{\lambda_i t} \lambda_i v_i = e^{\lambda_i t} A v_i = A\phi_i(t)$$

gilt. Wegen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (da $\omega \neq 0$) sind sie linear unabhängig und bilden daher eine Basis des Lösungsraums, weil es sich um ein System 1. Ordnung von zwei Differentialgleichungen handelt.

Da die Koeffizientenmatrix A reell ist, sind auch

$$\mathrm{Re}(\phi_1)(t) = \mathrm{Re}\left((\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) \begin{pmatrix} -i \\ \omega \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \omega \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

und

$$\mathrm{Im}(\phi_2)(t) = \mathrm{Im}\left((\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)) \begin{pmatrix} i \\ \omega \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Lösungen. Diese reellen Lösungen bilden ebenfalls eine Basis des Lösungsraums, weil die Sinus- und Cosinusfunktion linear unabhängig sind.

b) Einsetzen des Ansatzes

$$Y(t) = c \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

in das gegebene inhomogene System ergibt

$$\begin{pmatrix} c\cos(t) \\ -c\sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\cos(t) \\ -\omega^2 c\sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Dieser Ansatz liefert also genau dann eine partikuläre Lösung, wenn

$$-c = -\omega^2 c + 1,$$

also $c = \frac{1}{\omega^2 - 1}$ gilt (man beachte, dass $\omega^2 - 1 \neq 0$, weil $\omega \neq 1$ ist). Somit ist

$$\psi(t) := \frac{1}{\omega^2 - 1} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

eine partikuläre Lösung.

c) Die allgemeine Lösung des angeregten Systems ist durch $\psi(t) + S_H$ gegeben, wobei $\psi(t)$ die partikuläre Lösung aus b) ist und S_H den Lösungsraum des homogenen Systems aus a) bezeichnet. Somit ist

$$Y(t) = \frac{1}{\omega^2 - 1} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \omega\cos(\omega t) \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\omega\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

mit $A, B \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung des angeregten Systems.

Aufgabe 4

Der gedämpfte harmonische Oszillator:

$$y'' = -\omega^2 y - y'$$

beschreibt einen durch Reibung gedämpften harmonischen Oszillator bei unterkritischer Dämpfung (d.h. $\omega > \frac{1}{2}$).

a) Man bestimme eine Basis des Lösungsraums.

b) Man berechne die Wronski-Determinante für die gewählte Basis.

c) Man gebe die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung 2. Ordnung an.

a) Mit

$$Y := \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

kann die gegebene Differentialgleichung auf das System 1. Ordnung

$$Y' = AY$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -1 \end{pmatrix}$$

zurückgeführt werden. Die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix A sind gegeben durch

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \lambda + \omega^2 \overset{!}{=} 0,$$

also

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\omega^2}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\alpha$$

mit

$$\alpha := \sqrt{\omega^2 - \frac{1}{4}} \overset{\omega > \frac{1}{2}}{>} 0.$$

Die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\alpha$ sind gegeben durch

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} - i\alpha & 1 & 0 \\ -\omega^2 & -\frac{1}{2} - i\alpha & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -\lambda_1 & 1 & 0 \\ -\omega^2 & \lambda_2 & 0 \end{array}\right).$$

Weil die algebraische Vielfachheit von λ_1 gleich 1 ist, ist auch dessen geometrische Vielfachheit gleich 1. Daher sind die beiden Zeilen der Matrix dieses LGS linear abhängig und eine Lösung der ersten Zeile erfüllt gleichzeitig die zweite Zeile. Somit ist $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_1.

Daraus folgt mit komplexer Konjugation, dass $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ ist.
Wie bei Aufgabe 3a) sind

$$\phi_1(t) = e^{\lambda_1 t} v_1 = e^{-\frac{1}{2}t} e^{i\alpha t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} + i\alpha \end{pmatrix}$$

und

$$\phi_2(t) = e^{\lambda_2 t} v_2 = e^{-\frac{1}{2}t} e^{-i\alpha t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} - i\alpha \end{pmatrix}$$

Lösungen des Systems $Y' = AY$. Somit sind $y_1(t) = e^{-\frac{1}{2}t} e^{i\alpha t}$ und $y_2(t) = e^{-\frac{1}{2}t} e^{-i\alpha t}$ Lösungen der gegebenen Differentialgleichung 2. Ordnung. Weil A eine reelle Matrix ist, sind auch die reellen Funktionen

$$\psi_1(t) = \mathrm{Re}(y_1(t)) = e^{-\frac{1}{2}t} \cos(\alpha t), \; \psi_2(t) = \mathrm{Im}(y_1(t)) = e^{-\frac{1}{2}t} \sin(\alpha t)$$

Lösungen. Da die Sinus- und Cosinusfunktion linear unabhängig sind und es sich um eine lineare homogene Differentialgleichung 2. Ordnung handelt, bilden $\psi_1(t)$ und $\psi_2(t)$ eine Basis des Lösungsraums.

b) Für die Wronski-Determinante von (ψ_1, ψ_2) erhalten wir

$$\begin{aligned} W(t) &= \det \begin{pmatrix} \psi_1(t) & \psi_2(t) \\ \psi_1'(t) & \psi_2'(t) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}t} \cos(\alpha t) & e^{-\frac{1}{2}t} \sin(\alpha t) \\ e^{-\frac{1}{2}t}(-\frac{1}{2}\cos(\alpha t) - \alpha \sin(\alpha t)) & e^{-\frac{1}{2}t}(-\frac{1}{2}\sin(\alpha t) + \alpha \cos(\alpha t)) \end{pmatrix} \\ &= e^{-t}(\alpha \cos^2(\alpha t) + \alpha \sin^2(\alpha t)) = \alpha e^{-t}. \end{aligned}$$

Die Wronski-Determinante ist also für alle $t \in \mathbb{R}$ verschieden von Null. Dies stimmt mit dem Satz aus der Vorlesung überein, der besagt, dass dies der Fall ist, wenn (ψ_1, ψ_2) eine Basis des Lösungsraums ist.

c) Die allgemeine Lösung wird durch $\psi_1(t)$ und $\psi_2(t)$ aufgespannt, also ist sie durch

$$y(t) = e^{-\frac{1}{2}t}(A\cos(\alpha t) + B\sin(\alpha t))$$

mit $A,\ B \in \mathbb{R}$ gegeben.