D-MAVT | Lineare Algebra II | FS 2013
Prof. Dr. N. Hungerbühler

Serie 7

Einsendeschluss: Freitag, der 26. April um 14:00 Uhr.

Aufgabe 1

Sei $\mathcal{P}_3$ der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3. Die lineare Abbildung $\mathcal{F} : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3,\ p(x) \mapsto p(x) - p'(x)$ hat die Eigenwerte...

◯ 0 mit algebraischer und geometrischer Vielfachheit 4.

◯ 0 mit algebraischer Vielfachheit 4 und geometrischer Vielfachheit 1.

◯ 1 mit algebraischer und geometrischer Vielfachheit 4.

$\surd$ ◯ 1 mit algebraischer Vielfachheit 4 und geometrischer Vielfachheit 1.

Um die Eigenwerte der gegebenen linearen Abbildung $\mathcal{F}$ berechnen zu können, bestimmen wir zuerst ihre Darstellungsmatrix A bezüglich der Basis $\{1, x, x^2, x^3\}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(1) &= 1, \\ \mathcal{F}(x) &= x - 1, \\ \mathcal{F}(x^2) &= x^2 - 2x, \\ \mathcal{F}(x^3) &= x^3 - 3x^2. \end{aligned}$$

In den Spalten von A stehen die Koordinaten von $\mathcal{F}(1)$, $\mathcal{F}(x)$, $\mathcal{F}(x^2)$, $\mathcal{F}(x^3)$ bezüglich der Basis $\{1, x, x^2, x^3\}$. Somit gilt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\det(A - \lambda I_4) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^4,$$

weil die Determinante einer Dreiecksmatrix durch das Produkt der Diagonalelemente gegeben ist. Darum hat $\mathcal{F}$ nur den Eigenwert 1 mit algebraischer Vielfachheit 4.
Die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 1 ist gleich der Dimension des Kerns von $A - I_4$, also gleich der Anzahl der freien Parameter bei der Lösung des Gleichungssystems $(A - I_4)x = 0$ mit

$$A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die geometrische Vielfachheit ist daher gleich 1, weil die Lösung dieses Gleichungssystems durch $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ mit x_1 frei gegeben ist.
Bemerkung: Gemäss dieser Rechnung ist der Eigenraum von $\mathcal{F}$ zum Eigenwert 1 durch $\operatorname{span}\{1\}$ gegeben, weil das konstante Polynom $p(x) = 1$ die Koordinaten $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bezüglich der gewählten Basis hat.