D-MAVT | Lineare Algebra II | FS 2013

Prof. Dr. N. Hungerbühler

Serie 4

Einsendeschluss: Freitag, der 22. März um 14:00 Uhr.

Aufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

√ ○ Bezüglich des euklidischen Skalarprodukts in $\mathbb{R}^2$ ist die Orthogonalprojektion von $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ der Vektor $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

Die Orthogonalprojektion von $v = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ auf $w = \begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ bezüglich des euklidischen Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist gegeben durch

$$\frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} w = \frac{15}{45}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

√ ○ $A \in \mathbb{M}^{n\times n}$ ist eine orthogonale Matrix genau dann, wenn ihre Spalten eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bezüglich des euklidischen Skalarprodukts bilden.

Eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a^{(1)} & a^{(2)} & \cdots & a^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}^{n\times n}$$

ist genau dann orthogonal, wenn $A^\top A = \mathbb{I}_n$ gilt. Nun beachte man, dass der Eintrag von $A^\top A$ in der Zeile i und der Spalte j gleich dem euklidischen Skalarprodukt der Spalte i und der Spalte j ist:

$$(A^\top A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A^\top)_{ik}(A)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \langle a^{(i)}, a^{(j)}\rangle.$$

Somit ist die Orthogonalität von A äquivalent zu

$$\langle a^{(i)}, a^{(j)}\rangle = (\mathbb{I}_n)_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

für alle $1 \leq i, j \leq n$. Letzteres bedeutet genau, dass die Spalten von A eine Orthonormalbasis bezüglich des euklidischen Skalarprodukts bilden.

○ Falls sich die Graphen zweier Funktionen f und g senkrecht schneiden, so sind f und g orthogonal bezüglich des Skalarprodukts $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$.

Die Aussage stimmt zum Beispiel für die Funktionen $f(x) = x$ und $g(x) = -x$ nicht. Deren Graphen schneiden sich senkrecht im Ursprung, aber es gilt

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b (-x^2)\,dx = \frac{a^3}{3} - \frac{b^3}{3} < 0,$$

also sind f und g nicht orthogonal bezüglich $\langle \cdot, \cdot\rangle$ (beachte $a < b$).

√ ○ Ist f eine ungerade Funktion und g eine gerade Fuktion, so sind f und g orthogonal bezüglich des Skalarprodukts $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$.

Eine ungerade Funktion f erfüllt die Eigenschaft $f(-x) = -f(x)$ und eine gerade Funktion g die Eigenschaft $g(-x) = g(x)$. Somit liefert die Substitution $y = -x$ die folgende Beziehung für das Skalarprodukt $\langle f, g\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle &= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx = \int_{1}^{-1} f(-y)g(-y)\,(-dy) = \int_{-1}^{1} f(-y)g(-y)\,dy \\ &= \int_{-1}^{1} (-f(y))g(y)\,dy = -\int_{-1}^{1} f(y)g(y)\,dy = -\langle f, g\rangle.\end{aligned}$$

Daraus folgt $\langle f, g\rangle = 0$, die ungerade Funktion f und die gerade Funktion g sind also orthogonal bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

◯ In einem Vektorraum mit Skalarprodukt können zwei Einheitsvektoren ein beliebig grosses Skalarprodukt haben.

Für zwei Einheitsvektoren v und w besagt die Schwarzsche Ungleichung (Satz 4.5 im Buch von Nipp/Stoffer)

$$\langle v, w\rangle^2 \leq \langle v, v\rangle \cdot \langle w, w\rangle = 1 \cdot 1 = 1.$$

Daraus folgt $\langle v, w\rangle \leq 1$, das Skalarprodukt zweier Einheitsvektoren kann also nicht beliebig gross sein.

◯ In jedem Vektorraum mit Skalarprodukt können wir beliebig viele paarweise orthogonale Einheitsvektoren finden.

Man beachte, dass paarweise orthogonale Einheitsvektoren in einem Vektorraum mit Skalarprodukt automatisch linear unabhängig sind (Satz 4.6 im Buch von Nipp/Stoffer). Somit kann es in einem Vektorraum der Dimension n höchstens n paarweise orthogonale Einheitsvektoren geben.