D-MAVT | Lineare Algebra II | FS 2013
Prof. Dr. N. Hungerbühler

Serie 9

Einsendeschluss: Freitag, der 10. Mai um 14:00 Uhr.

Aufgabe 1

a) Die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ definiere eine Abbildung $A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, z \mapsto Az$.

Dann gilt:

√ ◯ A hat drei paarweise verschiedene Eigenwerte.

◯ A hat keine Basis von Eigenvektoren.

◯ Die geometrische Vielfachheit des kleinsten Eigenwertes von A ist 2.

√ ◯ Die algebraische Vielfachheit des grössten Eigenwertes von A ist 1.

√ ◯ Die Menge der Eigenwerte von A und A^T ist gleich.

Die Eigenwerte von A sind gegeben durch

$$\det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 4-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda)(6-\lambda) \stackrel{!}{=} 0.$$

Die Eigenwerte sind somit 1, 4 und 6 und paarweise verschieden (allgemein sind die Eigenwerte einer Dreiecksmatrix genau die Diagonaleinträge). Daher haben alle Eigenwerte algebraische Vielfachheit 1 und auch geometrische Vielfachheit 1 (letzteres weil die geometrische Vielfachheit mindestens 1 und kleiner gleich der algebraischen Vielfachheit ist). Insbesondere ist die Summe der geometrischen Vielfachheiten gleich 3, weshalb A eine Basis von Eigenvektoren hat. Somit sind die erste und vierte Aussage richtig, aber die zweite und dritte Aussage falsch. Die Eigenwerte von $A^\top$ sind die Nullstellen von

$$\det(A^\top - \lambda I_3).$$

Es gilt

$$\det(A^\top - \lambda I_3) = \det((A - \lambda I_3)^\top) = \det(A - \lambda I_3),$$

somit hat $A^\top$ die gleichen Eigenwerte wie A und die letzte Aussage ist richtig.

b) Welche der folgenden Aussagen sind für beliebige quadratische Matrizen A und B richtig?

√ ◯ Ist A diagonalisierbar und invertierbar, so auch A^{-1}.

Wenn A diagonalisierbar und invertierbar ist, gibt es eine invertierbare Matrix T mit $T^{-1}AT = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ diagonal, wobei die Eigenwerte λ_i verschieden von 0 sind. Daraus folgt

$$T^{-1}A^{-1}T = (T^{-1}AT)^{-1} = D^{-1} = \operatorname{diag}(\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}),$$

die Inverse A^{-1} ist also auch diagonalisierbar. Wegen $(A^{-1})^{-1} = A$ ist sie auch invertierbar.

√ ◯ Ist A diagonalisierbar, so auch $A^\top$.

Wenn A diagonalisierbar ist, gibt es eine invertierbare Matrix T mit $T^{-1}AT = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ diagonal. Daraus folgt durch Transponieren

$$(T^\top)A^\top(T^\top)^{-1} = (T^{-1}AT)^\top = D^\top = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

die Transponierte $A^\top$ ist also auch diagonalisierbar.

√ ◯ Ist A halbeinfach, so auch $A^\top$.

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass eine komplexe Matrix genau dann diagonalisierbar ist, wenn sie halbeinfach ist. Daher folgt aus der vorherigen Aussage die Richtigkeit dieser Aussage.

◯ Sind A und B diagonalisierbar, so ist auch $A + B$ diagonalisierbar.

Man betrachte zum Beispiel $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Beide Matrizen haben die Eigenwerte 0 und 1 mit algebraischer und geometrischer Vielfachheit 1 und sind daher diagonalisierbar. Ihre Summe $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat aber nur den Eigenwert 1 mit algebraischer Vielfachheit 2 und strikt kleinerer geometrischer Vielfachheit 1 (der zugehörige Eigenraum ist $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$). Daher ist $A + B$ nicht diagonalisierbar.

◯ Sind A und B diagonalisierbar, so ist auch AB diagonalisierbar.

Man betrachte zum Beispiel $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Beide Matrizen haben die Eigenwerte 0 und 1 mit algebraischer und geometrischer Vielfachheit 1 und sind daher diagonalisierbar.

Ihr Produkt $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat aber nur den Eigenwert 0 mit algebraischer Vielfachheit 2 und strikt kleinerer geometrischer Vielfachheit 1 (der zugehörige Eigenraum ist $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$). Daher ist AB nicht diagonalisierbar.

√ ◯ Ist A halbeinfach, so auch A^2.

Wenn A halbeinfach ist, dann ist A diagonalisierbar und es gibt eine invertierbare Matrix T mit $T^{-1}AT = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonal. Daraus folgt

$$T^{-1}A^2T = (T^{-1}AT)(T^{-1}AT) = D^2 = \operatorname{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2),$$

das Quadrat A^2 ist also auch diagonalisierbar und somit auch halbeinfach.

◯ Ist A einfach, so auch A^2.

Man betrachte zum Beispiel $A = \operatorname{diag}(1, -1)$. Diese Matrix ist einfach, weil ihre Eigenwerte 1 und -1 algebraische Vielfachheit 1 haben. Ihr Quadrat $A^2 = I_2$ hat den Eigenwert 1 mit algebraischer Vielfachheit 2 und ist daher nicht einfach. Somit ist diese letzte Aussage falsch.