Serie 6

Einsendeschluss: Freitag, der 19. April um 14:00 Uhr.

Aufgabe 1

a) Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ so, dass $Ax = 0$ <u>nur</u> die triviale Lösung hat. Dann gilt:

$\checkmark$ ◯ $\dim(\text{Bild}\, A) = n$.

◯ $\dim(\text{Bild}\, A) = 1$.

$\checkmark$ ◯ $\dim(\text{Kern}\, A) = 0$.

◯ $\dim(\text{Kern}\, A) = 1$.

Der Kern von A ist genau die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = 0$. Da $Ax = 0$ nur die triviale Lösung hat, gilt darum $\dim(\text{Kern}\, A) = 0$. Weiter gilt nach der in der Vorlesung behandelten Dimensionsformel

$$\dim(\text{Kern}\, A) + \dim(\text{Bild}\, A) = n.$$

Daher gilt $\dim(\text{Bild}\, A) = n$.

b) Das Bild von

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch die lineare Hülle der Vektoren...

◯ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

◯ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$

◯ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

◯ $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

$\checkmark$ ◯ $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

Wir bringen die gegebene Matrix A mit dem Gaussverfahren in Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daher hat das Bild von A die Dimension 2 und die beiden ersten Spalten $\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ bilden eine Basis von Bild A.
Somit ist die fünfte Antwort richtig und alle Vektoren im Bild von A sind von der Form

$$\begin{pmatrix}2\lambda_1+\lambda_2\\ \lambda_1\\ 3\lambda_1+\lambda_2\end{pmatrix}$$

für λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$. Die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ sind nicht von dieser Form (λ_1 müsste für beide Vektoren gleich 1 sein und es gibt kein passendes λ_2). Sie liegen daher nicht im Bild von A und die erste und vierte Antwort sind falsch.
Die zweite und dritte Antwort sind auch falsch, weil Vektoren im $\mathbb{R}^4$ nicht im Bild von A liegen.

c) Eine Basis des Kerns von

$$\begin{pmatrix}2&1&-1&2\\1&0&-1&0\\3&1&-2&2\end{pmatrix}$$

ist gegeben durch...

√ ○ $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-3\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

○ $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-5\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$.

○ $\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

○ $\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

○ $\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix}\right\}$.

In b) haben wir die gegebene Matrix A mit dem Gaussverfahren in die Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix}2&1&-1&2\\0&-1&-1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

gebracht. Daher sind die Lösungen des Gleichungssystems $Ax = 0$ durch

$$\begin{aligned} x_2 &= -x_3 - 2x_4 \\ x_1 &= \frac{1}{2}((x_3 + 2x_4) + x_3 - 2x_4) = x_3 \end{aligned}$$

gegeben, wobei x_3 und x_4 freie Parameter sind. Der Kern von A hat somit die Dimension 2.
Die Vektoren $(1, -1, 1, 0)^\top, (1, -3, 1, 1)^\top$ sind Lösungen von $Ax = 0$ und linear unabhängig, da der zweite kein Vielfaches vom ersten ist. Sie bilden daher eine Basis vom Kern von A.
Die zweite Antwort ist falsch, weil jede Basis vom Kern von A zwei Elemente hat.
Die dritte und fünfte Antwort sind falsch, weil Vektoren im $\mathbb{R}^3$ nicht im Kern von A liegen.
Die vierte Antwort ist falsch, weil $(1, 0, -1, 0)^\top$ keine Lösung von $Ax = 0$ ist.

d) Ein Vektor habe bezüglich der Basis $\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ die Koordinaten $(-1, -1)$. Die Koordinaten bezüglich der Standardbasis sind...

○ $(\frac{1}{2}, 0)$.

○ $(-1, -1)$.

○ $(0, -2)$.

√ ○ $(2, 0)$.

○ $(1, 1)$.

Da der gegebene Vektor v bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ die Koordinaten $(-1, 1)$ hat, gilt

$$v = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daher sind $(2, 0)$ die Koordinaten von v bezüglich der Standardbasis.

e) Seien A und B Darstellungsmatrizen einer Funktion $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Dann gilt $\det A = \det B$.

√ ○ Richtig

○ Falsch

A und B sind ähnlich, d.h. $B = TAT^{-1}$ für eine reguläre Matrix T (nämlich die Übergangsmatrix). Daher gilt $\det B = \det(TAT^{-1}) = \det T \det A (\det T)^{-1} = \det A$.