Prof. Dr. N. Hungerbühler

MC-Aufgaben Serie 3

Einsendeschluss: Freitag, der 15. März um 14:00 Uhr.

Aufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

○ Die Norm $\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| := |x| + |y|$ wird von einem Skalarprodukt induziert.

Diese Norm erfüllt die Parallelogrammregel nicht und wird daher nicht von einem Skalarprodukt induziert (vgl. Aufgabe 4a) dieser Serie). In der Tat haben wir für $v = (1,0)^\top$ und $w = (0,1)^\top$

$$\begin{aligned} \|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 &= \|(1,1)^\top\|^2 + \|(1,-1)^\top\|^2 = 2^2 + 2^2 = 8, \\ 2(\|v\|^2 + \|w\|^2) &= 2(1^2 + 1^2) = 4, \end{aligned}$$

also

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 \neq 2(\|v\|^2 + \|w\|^2).$$

√ ○ $\langle a, b \rangle := ab$ ist ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum $\mathbb{R}$.

$\langle a, b \rangle := ab$ erfüllt die Eigenschaften eines Skalarprodukts auf $\mathbb{R}$:

1. linear im ersten Faktor:
   (i) $\langle a_1 + a_2, b \rangle = (a_1 + a_2)b = a_1 b + a_2 b = \langle a_1, b \rangle + \langle a_2, b \rangle$
   (ii) $\langle \alpha a, b \rangle = (\alpha a)b = \alpha(ab) = \alpha \langle a, b \rangle$
2. symmetrisch: $\langle a, b \rangle = ab = ba = \langle b, a \rangle$
3. positiv definit: $\langle a, a \rangle = a^2 \geq 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$ und aus $\langle a, a \rangle = a^2 = 0$ folgt $a = 0$.

√ ○ Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$.

Sei $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\|x\|_\infty^2 = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}^2 = \max\{x_1^2, \ldots, x_n^2\} \leq x_1^2 + \cdots + x_n^2 = \|x\|_2^2$$

und

$$\|x\|_1^2 = (|x_1| + \cdots + |x_n|)^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 + 2\sum_{i<j} |x_i| \cdot |x_j| \geq x_1^2 + \cdots + x_n^2 = \|x\|_2^2.$$

Daher gilt

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1.$$

√ ○ Die Folge von Funktionen $f_n(x) = \frac{1}{1+(nx)^2}$ auf $[-1,1]$ konvergiert bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{L^1}$ gegen die Funktion $f(x) \equiv 0$.

Es gilt

$$\begin{aligned} \|f_n\|_1 &= \int_{-1}^{1} |f_n(x)|\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+(nx)^2} = \frac{1}{n} \arctan(nx)\Big|_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{n} \cdot (\arctan n - \arctan(-n)) = \frac{2}{n} \arctan n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \cdot \frac{\pi}{2} = 0. \end{aligned}$$

Also konvergiert die Folge von Funktionen $f_n(x)$ auf $[-1,1]$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{L^1}$ gegen die Nullfunktion $f \equiv 0$.

○ Die Folge von Funktionen $f_n(x) = \frac{1}{1+(nx)^2}$ auf $[-1,1]$ konvergiert bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{L^\infty}$ gegen die Funktion $f(x) \equiv 0$.

Nach Definition der Maximumsnorm auf $C^0([-1,1])$ haben wir

$$\|f_n\|_\infty = \max\{|f_n(x)| : -1 \leq x \leq 1\} = \max\left\{\frac{1}{1+(nx)^2} : -1 \leq x \leq 1\right\} = 1.$$

Dieses Maximum wird für $x = 0$ angenommen, für alle n, es gilt $f_n(0) = 1$. Für $x \neq 0$ gilt nämlich $1 + (nx)^2 > 1$, also auch

$$f_n(x) = \frac{1}{1+(nx)^2} < 1 = f_n(0).$$

Somit konvergiert die Folge von Fuktionen $f_n(x)$ auf $[-1,1]$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{L^\infty}$ nicht gegen die Nullfunktion $f \equiv 0$.

√ ○ Der Betrag $|\cdot|$ ist eine Norm auf dem Vektorraum $\mathbb{R}$.

Der Betrag $|\cdot|$ auf $\mathbb{R}$ erfüllt die Eigenschaften einer Norm:

1. Es gilt $|a| \geq 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$ und aus $|a| = 0$ folgt $a = 0$.
2. Für alle $a, \alpha \in \mathbb{R}$ gilt $|\alpha a| = |\alpha| \cdot |a|$.
3. Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt die Dreiecksungleichung $|a + b| \leq |a| + |b|$.