Lösungen Serie 3

Aufgabe 1

Siehe separates `pdf`.

Aufgabe 2

Sei $V = \mathbb{R}^2$, $D = \operatorname{diag}(2, \frac{1}{3})$. Wir definieren $\langle x, y\rangle := x^\top Dy$ für $x, y \in V$.

a) Zeigen Sie, dass $\langle \cdot\,, \cdot\rangle$ in V ein Skalarprodukt definiert.

b) Wie sieht die durch $\langle \cdot\,, \cdot\rangle$ induzierte Norm $\|\cdot\|$ aus?

c) Berechnen Sie die Norm von $x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$.

$D = \operatorname{diag}(2, \frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\langle x, y\rangle := x^\top Dy = (x_1\ \ x_2)\begin{pmatrix} 2y_1 \\ \frac{1}{3}y_2 \end{pmatrix} = 2x_1y_1 + \frac{1}{3}x_2y_2.$$

a) Wir kontrollieren die Eigenschaften eines Skalarprodukts:

(a) Für alle $x,\ y,\ z \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

i) $\langle x + y, z\rangle = (x + y)^\top Dz = x^\top Dz + y^\top Dz = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$,

ii) $\langle \alpha x, y\rangle = (\alpha x)^\top Dy = \alpha x^\top Dy = \alpha\langle x, y\rangle$.

$\langle \cdot\,, \cdot\rangle$ ist also linear im ersten Faktor.

(b) $\langle \cdot\,, \cdot\rangle$ ist symmetrisch, denn für alle $x,\ y \in V$ gilt:

$$\langle x, y\rangle = x^\top Dy \overset{x^\top Dy \in \mathbb{R}}{=} (x^\top Dy)^\top = y^\top D^\top x = y^\top Dx = \langle y, x\rangle.$$

Bemerkung: Für D nicht symmetrisch ist $\langle x, y\rangle = x^\top Dy$ nicht mehr symmetrisch, also kein Skalarprodukt.

(c) $\langle \cdot\,, \cdot\rangle$ ist positiv definit, denn:

$$\langle x, x\rangle = 2x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2 \geq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^2$$
$$\langle x, x\rangle = 2x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0, \text{ also } x = 0.$$

$\langle \cdot\,, \cdot\rangle$ ist also ein Skalarprodukt in V.

b) Die durch $\langle \cdot\,, \cdot\rangle$ induzierte Norm ist

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x^\top Dx} = \sqrt{2x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2}.$$

c) $\left\|\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{2(-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{3}3^2} = \sqrt{\frac{7}{2}}$.

Aufgabe 3

Wir betrachten die Funktionen $f_n(x) := \alpha_n \cos(nx)$ und $g_m(x) := \beta_m \sin(mx)$ für $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m \geq 1$ und α_n, $\beta_m > 0$ im Vektorraum $V = C^0([0, 2\pi])$, den wir mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$$

ausstatten.

a) Man rechne nach, dass je zwei verschiedene Funktionen aus dieser Menge orthogonal sind.

b) Wie sind α_n und β_m zu wählen, damit alle Funktionen aus dieser Menge die Norm 1 haben?

Hinweis: Verwenden Sie die folgenden trigonometrischen Identitäten:

$$\begin{aligned}
\sin u \, \sin v &= \frac{1}{2}\left(\cos(u-v) - \cos(u+v)\right) \\
\cos u \, \cos v &= \frac{1}{2}\left(\cos(u-v) + \cos(u+v)\right) \\
\sin u \, \cos v &= \frac{1}{2}\left(\sin(u-v) + \sin(u+v)\right)
\end{aligned}$$

a) Wir müssen die Orthogonalitätsrelationen $\langle f_m, f_n \rangle = 0$, $\langle g_m, g_n \rangle = 0$ für $m \neq n$ sowie $\langle f_n, g_m \rangle = 0$ zeigen. Wir benutzen dafür die trigonometrischen Identitäten aus dem Hinweis und rechnen zuerst die drei Relationen für $m \neq n$ nach:

$$\begin{aligned}
\langle f_m, f_n \rangle &= \int_0^{2\pi} \big(\alpha_m \cos(mx)\big) \cdot \big(\alpha_n \cos(nx)\big)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\alpha_m\alpha_n \left(\int_0^{2\pi} \cos((m-n)x)\,dx + \int_0^{2\pi} \cos((m+n)x)\,dx \right) \\
&\overset{m\neq n}{=} \frac{1}{2}\alpha_m\alpha_n \left(\frac{1}{m-n}\sin((m-n)x)\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{m+n}\sin((m+n)x)\Big|_0^{2\pi} \right) \\
&= \frac{1}{2}\alpha_m\alpha_n(0-0+0-0) = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle g_m, g_n \rangle &= \int_0^{2\pi} \big(\beta_m \sin(mx)\big) \cdot \big(\beta_n \sin(nx)\big)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\beta_m\beta_n \left(\int_0^{2\pi} \cos((m-n)x)\,dx - \int_0^{2\pi} \cos((m+n)x)\,dx \right) \\
&\overset{m\neq n}{=} \frac{1}{2}\beta_m\beta_n \left(\frac{1}{m-n}\sin((m-n)x)\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{m+n}\sin((m+n)x)\Big|_0^{2\pi} \right) \\
&= \frac{1}{2}\beta_m\beta_n(0-0-0+0) = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle f_n, g_m\rangle &= \int_0^{2\pi} \big(\alpha_n\cos(nx)\big)\cdot\big(\beta_m\sin(mx)\big)\,dx\\
&= \frac{1}{2}\alpha_n\beta_m\left(\int_0^{2\pi}\sin((m-n)x)\,dx + \int_0^{2\pi}\sin((m+n)x)\,dx\right)\\
&\overset{m\neq n}{=} \frac{1}{2}\alpha_n\beta_m\left(-\frac{1}{m-n}\cos((m-n)x)\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{m+n}\cos((m+n)x)\Big|_0^{2\pi}\right)\\
&= \frac{1}{2}\alpha_n\beta_m\left(-\frac{1}{m-n}+\frac{1}{m-n}-\frac{1}{m+n}+\frac{1}{m+n}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Es bleibt die dritte Relation für $m = n \geq 1$ zu zeigen:

$$\begin{aligned}
\langle f_n, g_n\rangle &= \int_0^{2\pi} \big(\alpha_n\cos(nx)\big)\cdot\big(\beta_n\sin(nx)\big)\,dx\\
&= \frac{1}{2}\alpha_n\beta_n\left(\int_0^{2\pi}\sin(0)\,dx + \int_0^{2\pi}\sin(2nx)\,dx\right)\\
&\overset{n\geq 1}{=} \frac{1}{2}\alpha_n\beta_n\left(0 - \frac{1}{2n}\cos(2nx)\Big|_0^{2\pi}\right)\\
&= \frac{1}{2}\alpha_n\beta_n\left(-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}\right) = 0.
\end{aligned}$$

b) Für $n,\, m \geq 1$ bekommen wir

$$\begin{aligned}
\langle f_n, f_n\rangle &= \int_0^{2\pi} \big(\alpha_n\cos(nx)\big)\cdot\big(\alpha_n\cos(nx)\big)\,dx\\
&= \frac{1}{2}\alpha_n^2\left(\int_0^{2\pi}\cos(0)\,dx + \int_0^{2\pi}\cos(2nx)\,dx\right)\\
&\overset{n\geq 1}{=} \frac{1}{2}\alpha_n^2\left(2\pi + \frac{1}{2n}\sin(2nx)\Big|_0^{2\pi}\right)\\
&= \frac{1}{2}\alpha_n^2(2\pi+0-0) = \alpha_n^2\,\pi,\\
\langle g_m, g_m\rangle &= \int_0^{2\pi} \big(\beta_m\sin(mx)\big)\cdot\big(\beta_m\sin(mx)\big)\,dx\\
&= \frac{1}{2}\beta_m^2\left(\int_0^{2\pi}\cos(0)\,dx - \int_0^{2\pi}\cos(2mx)\,dx\right)\\
&\overset{m\geq 1}{=} \frac{1}{2}\beta_m^2\left(2\pi - \frac{1}{2m}\sin(2mx)\Big|_0^{2\pi}\right)\\
&= \frac{1}{2}\beta_m^2(2\pi-0+0) = \beta_m^2\,\pi
\end{aligned}$$

und für $n = 0$

$$\langle f_0, f_0\rangle = \int_0^{2\pi}(\alpha_0\cdot 1)(\alpha_0\cdot 1)\,dx = \alpha_0^2\cdot(2\pi).$$

Die Funktionen f_n und g_m haben genau dann Norm 1, wenn $\langle f_n, f_n\rangle = 1$ und $\langle g_m, g_m\rangle = 1$ gilt. Somit muss $\alpha_n^2\,\pi = 1$ für $n \geq 1$ und $\beta_m^2\,\pi = 1$ für $m \geq 1$ sowie $2\alpha_0^2\,\pi = 1$ gelten. Also muss gelten:

$$\alpha_n = \beta_m = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \forall\, n,\, m \geq 1 \text{ und}$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Aufgabe 4

a) Sei $\|\cdot\|$ eine von einem Skalarprodukt induzierte Norm. Man rechne nach, dass dann die Parallelogrammregel gilt:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

b) Man verifiziere, dass die Maximumsnorm

$$\|f\|_{L^\infty} := \max\{|f(x)| : a \le x \le b\}$$

auf $C^0([a,b])$ die Axiome einer Norm erfüllt.

c) Auf dem Vektorraum der Polynome definiert

$$\langle P, Q\rangle := \int_0^1 P(x)Q(x)\,dx$$

ein Skalarprodukt. Bestimmen Sie ein Polynom zweiten Grades, das senkrecht auf $P_0(x) = 1$ und $P_1(x) = x$ steht.

a) Wir nehmen an, dass $\|\cdot\|$ vom Skalarprodukt $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ induziert ist. Wir rechnen die Parallelogrammregel unter Ausnutzung der Bilinearität und Symmetrie nach:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\
&= \quad \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\
&\quad + \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\
&= 2\langle x,x\rangle + 2\langle y,y\rangle = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).
\end{aligned}$$

b)
- (i) Für jede Funktion $f \in C^0([a,b])$ gilt

  $$\|f\|_{L^\infty} = \max\{|f(x)| : a \le x \le b\} \ge 0.$$

  (ii) Aus $\|f\|_{L^\infty} = \max\{|f(x)| : a \le x \le b\} = 0$ folgt $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$, also $f \equiv 0$.
- Für jede Funktion $f \in C^0([a,b])$ und jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

  $$\begin{aligned}
  \|\alpha f\|_{L^\infty} &= \max\{|\alpha \cdot f(x)| : a \le x \le b\} = \max\{|\alpha| \cdot |f(x)| : a \le x \le b\} \\
  &= |\alpha| \max\{|f(x)| : a \le x \le b\} = |\alpha|\, \|f\|_{L^\infty}.
  \end{aligned}$$

- Für alle Funktionen $f, g \in C^0([a,b])$ gilt

  $$\begin{aligned}
  \|f+g\|_{L^\infty} &= \max\{|f(x)+g(x)| : a \le x \le b\} \\
  &\le \max\{|f(x)| + |g(x)| : a \le x \le b\} \\
  &\le \max\{|f(x)| : a \le x \le b\} + \max\{|g(x)| : a \le x \le b\} \\
  &= \|f\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^\infty}.
  \end{aligned}$$

c) Wir machen den Ansatz

$$P_2(x) = x^2 + ax + b$$

für ein Polynom zweiten Grades, das senkrecht auf $P_0(x) = 1$ und $P_1(x) = x$ steht. Die Relationen $\langle P_2, P_0\rangle = 0$ und $\langle P_2, P_1\rangle = 0$ liefern zwei lineare Gleichungen für die Koeffizienten a und b:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle P_2, P_0\rangle = \int_0^1 (x^2 + ax + b)\, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} + bx \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{a}{2} + b, \\ 0 &= \langle P_2, P_1\rangle = \int_0^1 (x^3 + ax^2 + bx)\, dx = \frac{x^4}{4} + \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{a}{3} + \frac{b}{2}. \end{aligned}$$

Dies entspricht dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3a + 6b &= -2 \\ 4a + 6b &= -3, \end{aligned}$$

welches wir mit dem Gaussverfahren lösen:

$$\boxed{\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & -2 \\ 4 & 6 & -3 \end{array}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & -\frac{1}{3} \end{array}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & -2 \\ 0 & 6 & 1 \end{array}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 1 \end{array}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} \end{array}}$$

Also ist die eindeutige Lösung durch $a = -1$ und $b = \frac{1}{6}$ gegeben und

$$P_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

ist ein Polynom zweiten Grades, das senkrecht auf $P_0(x) = 1$ und $P_1(x) = x$ steht.