ETHZ D-ARCH
Studiengang
Architektur

Basisprüfung

Mathematisches Denken I & II

Frühling 2007
Dozent
Dr. M. Leupp

Notieren Sie beim Lösen alle wichtigen Teilschritte, achten Sie auf eine saubere Darstellung. Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. **Viel Erfolg!**

Erlaubte Hilfsmittel: Vorlesungsnotizen, Übungsserien, elementarer Taschenrechner *Zeit: 3 Std.*

Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht allzu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet. Es wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben lösen.

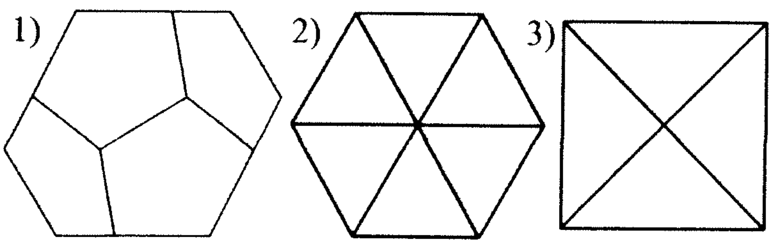
1. [20P.] **Kurzaufgaben:** (jede Teilaufgabe gibt gleich viele Punkte)

   (a) Ordnen Sie die Abbildungen 1, 2, 3 in Figur 1 ihrer jeweiligen **Symmetriegruppe** $\mathbb{D}_1$, ..., $\mathbb{C}_1$, ... zu. Fassen Sie anschliessend die drei Abbildungen als besondere Ansichten von Drahtmodellen **Platonischer Körper** auf (z. B. Ansicht längs einer Raumdiagonalen). Um welchen regulären Körper handelt es sich jeweils? (Bei 3) alle Möglichkeiten angeben!)

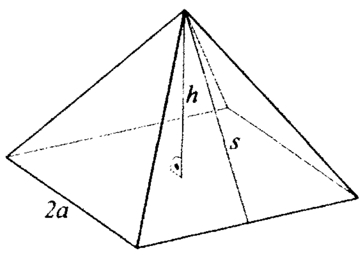
   (b) Von einer geraden **Pyramide** mit quadratischer Grundfläche der Seitenlänge $2a$ (Figur 2) wird auf halber Höhe h parallel zur Grundfläche die Spitze abgeschnitten. Anschliessend wird durch die quadratische Deckfläche des entstandenen Pyramidenstumpfs senkrecht nach unten ein quadratisches Loch gleicher Grösse bis zur Grundfläche ausgebohrt. Welchen Bruchteil des Volumens der ursprünglichen Pyramide besitzt dann der durchbohrte Pyramidenstumpf?

   (c) Die **Cheops-Pyramide** ist eine Pyramide mit quadratischem Grundriss (Figur 2). Die Höhe der dreieckigen Seitenflächen werde mit s bezeichnet. Der römische Schriftsteller HERODOT schreibt, dass ihm die ägyptischen Priester über die Form der Cheops-Pyramide die Angaben gemacht hätten, das Quadrat über ihrer Höhe h sei einem Seitendreieck flächengleich. (In Formeln heisst dies: $h^2 = F$, wobei F den Flächeninhalt eines Seitendreiecks bezeichnet.) Wie gross ist dann das Verhältnis der Seitenflächenhöhe s zur halben Grundrissquadratlänge a? (Setzen Sie zur Vereinfachung $a := 1$)

   (d) Die Projektion der **Raumkurve** γ auf die (x, y)-Ebene ist eine Ellipse mit Halbachsen der Längen 2 und 4, die auf der x- bzw. auf der y-Achse liegen. Die Projektion von γ auf die (x, z)-Ebene ist ebenfalls eine Ellipse jedoch mit Halbachsen der Längen 2 und 3, wobei letztere auf der z-Achse liegt. Wie lautet eine Parameterdarstellung einer solchen Kurve γ? Skizzieren Sie ferner die Projektion γ'' von γ auf die (y, z)-Ebene (Aufriss) in ein (y, z)-Koordinatensystem.



Figur 1 (Aufgabe 1a)



Figur 2 (Aufgaben 1b, 1c)

2. [8P.] Im Folgenden werden **konvexe Polyeder** betrachtet, die aus lauter Quadraten und / oder regulären Fünfecken aufgebaut sind.

   (a) Skizzieren Sie einen solchen Körper bestehend aus zwei Fünfecken und fünf Quadraten.

   (b) Zeigen Sie durch Überprüfen aller Möglichkeiten, dass bei solchen Polyedern, die nur aus Quadraten und / oder regulären Fünfecken aufgebaut sind, in jeder Ecke nicht mehr als drei Kanten zusammenstossen können. (D.h. solche Polyeder besitzen nur dreikantige Ecken.)

   (c) Bestimmen Sie mithilfe der Eulerschen Polyederformel eine Bedingung über die Anzahl Quadrate und die Anzahl Fünfecke eines solchen Körpers. Zählen Sie alle möglichen Lösungen dieser Bedingung (Gleichung) in einer kleinen Tabelle auf.

3. [12P.] Der **Ponton** bzw. **Obelisk** ist ein Polyeder mit zwei zueinander parallelen Rechtecken als Grund- und Deckfläche und mit gleichschenkligen, paarweise kongruenten Seitentrapezen (Figur 3). In dieser Aufgabe sollen Sie in Teil (b) zeigen, dass für sein Volumen gilt: $V = (\frac{1}{3}ab + \frac{1}{3}cd + \frac{1}{6}ad + \frac{1}{6}bc) \cdot h$

   (a) Quader, Pyramiden mit den Grundflächen $ABCD$ sind Sonderformen des Obelisken. Zeigen Sie zunächst, dass die Volumenformel in diesen Spezialfällen gilt. D.h. *zeigen Sie*, dass sich in diesen beiden Spezialfällen die obige Volumenformel auf die Ihnen bereits bekannte Volumenformel für den Quader bzw. auf jene für die Pyramide reduziert.
   (b) Leiten Sie nun die Volumenformel für den Obelisken her, indem Sie ihn durch ebene Schnitte senkrecht zur Deckfläche entlang EF, FG, GH, HE in neun Teilkörper aufteilen.
   (c) Der Obelisk mit $a = 12$, $b = 16$, $c = 8$, $d = 6$ besitzt eine Umkugel mit dem Radius $R = 11$! Zeigen Sie, dass dann für die Höhe h des Obelisken gilt: $h = \sqrt{21} + \sqrt{96}$.

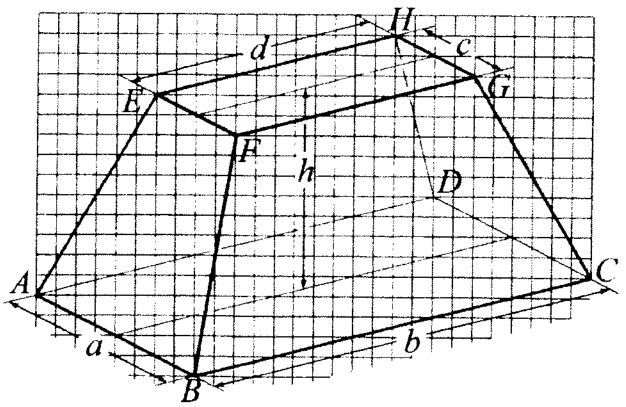
4. [8P.] Bezeichne Symm(Ω) die Menge aller Symmetrietransformationen der **Symmetriegruppe** der ebenen Figur Ω und Z einen Punkt von Ω. Von der Menge Symm(Ω) ist bekannt, dass sie die Rotation $R_{Z,90^\circ}$ umfasst.

   (a) Welche Elemente umfasst Symm(Ω) im Minimum? Geben Sie ferner von jedem Element an (ohne Beweis), wie es durch Verketten von $R_{Z,90^\circ}$ erzeugt werden kann.
   (b) Skizzieren Sie eine Figur Ω mit der Symmetriegruppe aus Teilaufgabe (a). (Z angeben!)
   (c) Symm(Ω) umfasse neben $R_{Z,90^\circ}$ auch noch die Spiegelung S_g, wobei die Gerade g durch Z geht. Welche Elemente umfasst nun Symm(Ω) mindestens? Geben Sie ferner von jedem Element an (ohne Beweis), wie es durch Verketten von $R_{Z,90^\circ}$ und S_g erzeugt werden kann.
   (d) Skizzieren Sie eine Figur Ω mit der Symmetriegruppe aus (c). (Z und g angeben!)

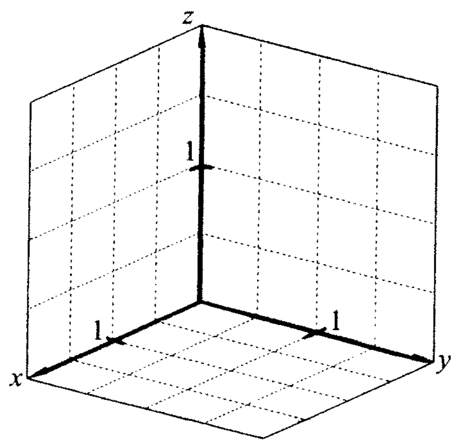
5. [12P.] Durch die folgende Parameterdarstellung wird eine **Fläche** S beschrieben

$$S: \ (\varphi, t) \longmapsto \vec{r} := \begin{pmatrix} t + \cos\varphi \\ t + \sin\varphi \\ t \end{pmatrix} \qquad (0 \leq \varphi < 2\pi\,,\ -\infty < t < \infty)$$

   (a) Übertragen Sie Figur 4 in Ihre Unterlagen und skizzieren Sie die Fläche S durch ein angedeutetes Netz von φ- und t-Linien. Was für Kurven sind die φ- bzw. die t-Linien?
   (b) Ist S eine Regelfläche? (Kurze Begründung ohne Rechnung)
   (c) Welchen Winkel schliesst die t-Linie zu $\varphi = 0$ mit der z-Richtung ein?
   (d) Leiten Sie die Koordinatengleichung (Gleichung in x, y und z) der Fläche S her.
   (e) Berechnen Sie den Normalenvektor im allgemeinen Flächenpunkt $\vec{r}_0 := \vec{r}(\varphi_0, t_0)$. Ist S abwickelbar? (Kurze Begründung mit dem soeben erhaltenen Resultat)



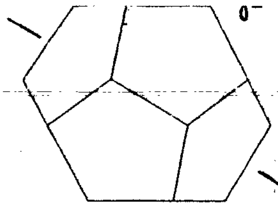
Figur 3 (Aufgabe 3)



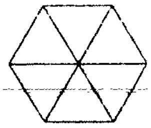
Figur 4 (Aufgabe 4)

Bitte wenden!

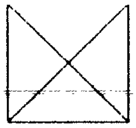
1 (a)



Dodekaeder



reg. 6-Eck ⇝ D_6, Würfel



reg. 4-Eck → D_4 Oktaeder Tetraeder

5P

(b) Volumen Pyramide: $V = \frac{1}{3}(2a)^2 \cdot h = \underline{\frac{4}{3} a^2 \cdot h}$, auf halber Höhe ist $\underline{a' = \frac{1}{2} a, h' = \frac{1}{2} h}$

Volumen Spitze: $V' = \frac{1}{3}(2a')^2 \cdot h' = \frac{4}{3} a'^2 \cdot h' = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} a^2 \cdot \frac{1}{2} h = \underline{\frac{1}{6} a^2 \cdot h} \quad (= \frac{1}{8} V)$

Volumen Loch: $V_L = (2a')^2 \cdot h' = 4a'^2 \cdot h' = 4 \cdot \frac{1}{4} a^2 \cdot \frac{1}{2} h = \underline{\frac{1}{2} a^2 \cdot h} = \frac{3}{6} a^2 h$

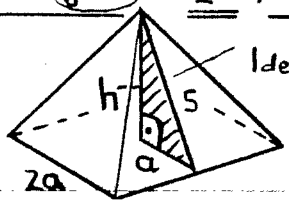
$\Big\} + \; = \frac{4}{6} a^2 \cdot h$

Volumen durchbohrter Stumpf: $V - V' - V_L = \frac{4}{3} a^2 \cdot h - \frac{4}{6} a^2 h = \frac{4}{6} a^2 h = \underline{\underline{\frac{1}{2} V}}$, die Hälfte!

5P

(c) Fläche Seitendreieck: $\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot s = a \cdot s \underset{a=1}{=} s \overset{\text{Soll}}{=} h^2$ ①

Pythagoras im $\underline{h}$-Dreieck: $s^2 = a^2 + h^2 \underset{a=1}{=} 1 + h^2$ ②



① in ②: $s^2 = 1 + s \leftrightarrow s^2 - s - 1 = 0 \quad \underline{s = \frac{1+\sqrt{5}}{2}} \quad \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \;\text{↯}\right) \; \underline{\frac{s}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

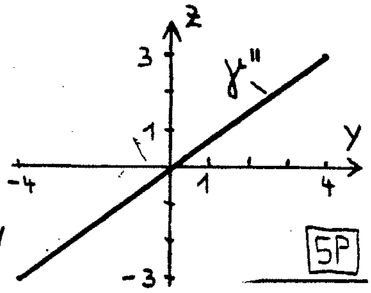
Verhältnis des Goldenen Schnitts!

5P

(d) Ellipse mit $a=2, b=4$: $\begin{pmatrix} a\cos t \\ b \sin t \\ \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 4 \sin t \\ \cdots \end{pmatrix}$, Ellipse mit 2, 3: $\begin{pmatrix} 2\cos t \\ \cdots \\ 3 \sin t \end{pmatrix}$

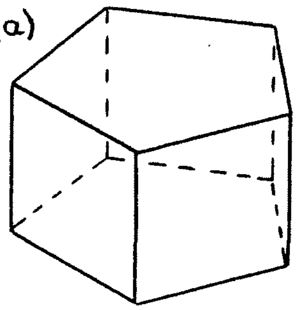
Parameterdrst von γ: $t \longmapsto \underline{\underline{\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 4 \sin t \\ 3 \sin t \end{pmatrix}}} \quad (0 \le t \le 2\pi)$ $\quad y = 4 \sin t$, $z = 3 \sin t$

$\rightsquigarrow z = \frac{y}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4} y$

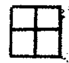


5P

2 (a)



(b) Innenwinkel im Quadrat: $90°$, im reg. Fünfeck: $\frac{1}{5}(5-2) \cdot 180° = 108°$

Mehr als 3 Kanten bedeutet in einer Eckfigur stossen mehr als 3 Flächen zusammen, im "günstigsten" Fall 4 Quadrate:  $4 \cdot 90° = 360°$!
$(108° > 90°)$

Dies ist <u>keine Eckfigur</u> und alle weiteren Fälle erst recht nicht.

(Zusatz: Möglich sind 3 5-Ecke, 2 5-Ecke & 4-Eck, 5-Eck & 2 4-Ecke, 3 4-Ecke)

(c) $f_4; f_5$: Anzahl Quadrate bzw. reguläre 5-Ecke; $e - k + f = 2$ Eulersche Polyederformel

① $3e = 2k$ (In jeder Ecke stossen 3 Kanten zusammen (siehe (b)), jede Kante wird dabei zweimal gezählt)

② $4f_4 + 5f_5 = 2k$ (Jede 4-Eckfläche hat 4 Kanten, jede 5-Eckfläche 5; jede Kante wird 2x gezählt)

③ $f_4 + f_5 = f$

$\underline{2} = e - k + f \overset{①}{=} \underbrace{\frac{2}{3}k - k}_{-\frac{1}{3}k} + f = -\frac{1}{3}\left(\frac{4}{2} f_4 + \frac{5}{2} f_5\right) + f_4 + f_5 = \underline{\frac{1}{3} f_4 + \frac{1}{6} f_5} \quad | \cdot 6$

$\underline{\underline{12 = 2f_4 + f_5}}$

Anz 4-Ecke	Anz 5-Ecke
6	0
5	2
4	4
3	6
2	8
1	10
0	12

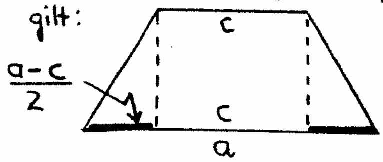
Zusatz: Nicht alle Lösungen müssen existieren!

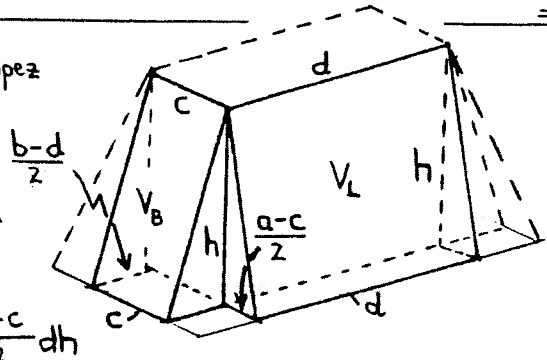
8P

3) (a) Quader: $a=c$, $b=d$ $\quad V=\left(\frac{1}{3}ab+\frac{1}{3}ab+\frac{1}{6}ab+\frac{1}{6}ab\right)\cdot h=\underline{\underline{abh}}$

Pyramide: $c=0$, $d=0$ $\quad V=\left(\frac{1}{3}ab+0+0+0\right)h=\underline{\underline{\frac{1}{3}abh}}$ ($\frac{1}{3}$ Grundfläche × Höhe)

(b) Im gleichschenkligen Trapez gilt:





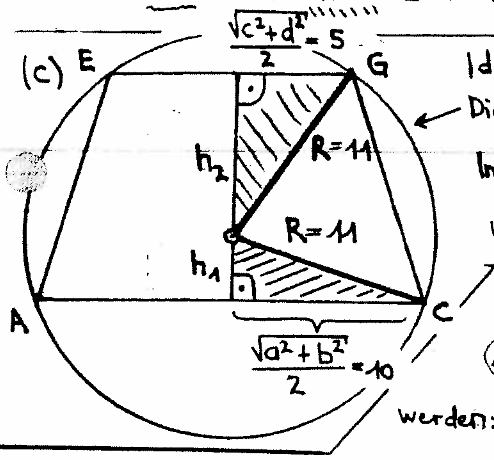
Eckpyramide:
$$V_E=\frac{1}{3}\cdot\underbrace{\frac{a-c}{2}\,\frac{b-d}{2}}_{\text{Grundfläche}}h$$

Halber Quader:
$$V_B=\frac{1}{2}\,\frac{b-d}{2}\,ch,\quad V_L=\frac{1}{2}\,\frac{a-c}{2}\,dh$$

Innenquader:
$$V_I=cdh$$

$$V=2V_B+2V_L+4V_E+V_I=\frac{b-d}{2}ch+\frac{a-c}{2}dh+\frac{1}{3}(a-c)(b-d)h+cdh$$
$$=\left(\frac{1}{2}bc-\cancel{\frac{1}{2}cd}+\frac{1}{2}ad-\cancel{\frac{1}{2}cd}+\frac{1}{3}ab-\frac{1}{3}ad-\frac{1}{3}bc+\frac{1}{3}cd+\cancel{cd}\right)h=\underline{\left(\frac{1}{3}ab+\frac{1}{3}cd+\frac{1}{6}ad+\frac{1}{6}bc\right)h}$$

(c)



Idee: "Diagonalschnitte" liefern kongruente, gleichschenklige Trapeze

Diagonalschnitt: $|AC|=\sqrt{a^2+b^2}=20$, $|EG|=\sqrt{c^2+d^2}=10$

Im rechtwinkligen Dreieck: $h_1=\sqrt{121-100}=\sqrt{21}$, $h_2=\sqrt{121-25}=\sqrt{96}$

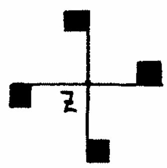
und $h=\sqrt{21}+\sqrt{96}$ ✓

$\boxed{12P}$

4) (a) Durch $R_{z,90°}$ kann jedes Element der zykl. Gruppe $\mathbb{C}_4$ erzeugt werden: $\underline{R_{z,90°}}$ | $R_{z,180°}=R_{z,90°}\circ R_{z,90°}$ | $\underline{R_{z,270°}}=R_{z,90°}\circ R_{z,90°}\circ R_{z,90°}$ | $\underline{I}=R_{z,360°}=\underbrace{R_{z,90°}\circ\ldots\circ R_{z,90°}}_{4\text{ Faktoren}}$

(Dies ist die kleinste Gruppe, die $R_{z,90°}$ enthält)

(b)



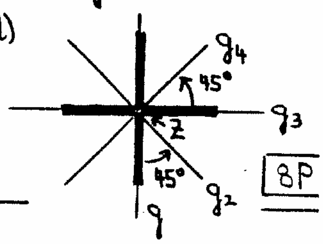
(c) Durch $R_{z,90°}$ und S_g kann jedes Element der Diedergruppe $\mathbb{D}_4$ erzeugt werden.

I, $R_{z,90°}$, $R_{z,180°}$, $R_{z,270°}$ (Erzeugung siehe (a)), S_g

$\underline{S_{g_2}}=R_{z,90°}\circ S_g$ | $\underline{S_{g_3}}=R_{z,90°}\circ S_{g_2}=R_{z,90°}\circ(R_{z,90°}\circ S_g)$

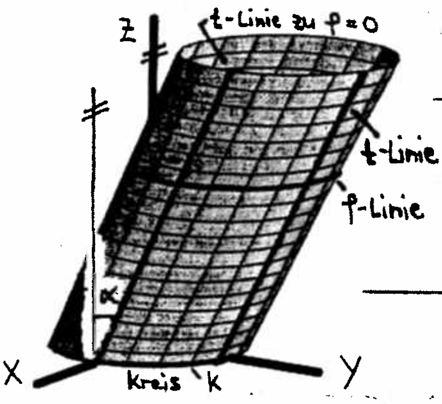
$\underline{S_{g_4}}=R_{z,90°}\circ S_{g_3}=R_{z,90°}\circ(R_{z,90°}\circ(R_{z,90°}\circ S_g))$

(d)



$\boxed{8P}$

5) (a) Schiefer Zylinder: t-Linien: Geraden, φ-Linien: (horizontale) Kreise



(b) S entsteht durch Parallelverschieben einer Geraden entlang dem "Grundkreis" K
⇝ Schar gerader Linien: Regelfläche (verallg. Zylinderfläche)

(c) t-Linie zu $\varphi=0$: $\quad t\longmapsto\vec{r}(0,t)=\begin{pmatrix}t+\cos 0\\ t+\sin 0\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t+1\\ t\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

z-Richtung: $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\quad \cos\alpha=\dfrac{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right|\cdot 1}=\dfrac{1}{\sqrt{3}\cdot 1}\approx 0.57735 \rightsquigarrow \underline{\underline{\alpha\approx 54.7356°}}$

(d) $x=t+\cos\varphi$, $y=t+\sin\varphi$; $z=t$ in x und y einsetzen

$x-z=\cos\varphi$, $y-z=\sin\varphi$ $\rightsquigarrow \underline{\underline{(x-z)^2+(y-z)^2}}=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=\underline{\underline{1}}$

(e) Idee: $\vec{n}=\vec{s}\times\vec{t}$

$\vec{s}=\vec{r}_{t_0}{}'(\varphi_0)=\begin{pmatrix}-\sin\varphi_0\\ \cos\varphi_0\\ 0\end{pmatrix}$, $\vec{t}=\vec{r}_{\varphi_0}{}'(t_0)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\quad \vec{n}=\vec{s}\times\vec{t}=\begin{pmatrix}-\sin\varphi_0\\ \cos\varphi_0\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi_0\\ \sin\varphi_0\\ -\sin\varphi_0-\cos\varphi_0\end{pmatrix}$

$\vec{n}$ ist unabhängig von t, d.h. $\vec{n}$ ist konstant entlang der t-Linie ⇝ <u>abwickelbar</u>

$\boxed{12P}$