ETHZ D-ARCH
Studiengang
Architektur

Basisprüfung

Mathematisches Denken I & II

Herbst 2005
Dozent
Dr. M. Leupp

Notieren Sie beim Lösen alle wichtigen Teilschritte, achten Sie auf eine saubere Darstellung. Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. **Viel Erfolg!**
Erlaubte Hilfsmittel: Vorlesungsnotizen, Übungsserien, elementarer Taschenrechner *Zeit: 3 Std.*

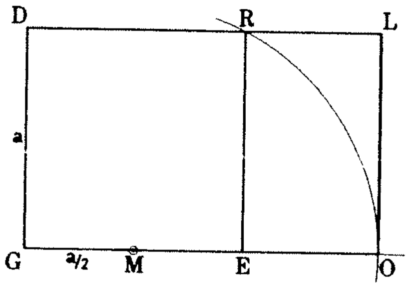
Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht allzu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet. Es wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben lösen.

1. [20P.] **Kurzaufgaben:** (jede Teilaufgabe gibt gleich viele Punkte)

   (a) Ordnen Sie alle 26 **Grossbuchstaben** (A,B,...,U,V,W,X,Y,Z) ihrer jeweiligen Symmetriegruppe $\mathbb{D}_1, \ldots, \mathbb{C}_1, \ldots$ zu. (Schnörkel, Verbreiterungen vernachlässigen!)

   (b) Dreht man ein rechtwinkliges Dreieck um eine Kathete, entsteht ein **Kegelkörper**. Um wieviel % vergrössert sich das Volumen des Körpers, wenn die Dreiecksfläche massstäblich unter Wahrung aller Proportionen um 44 % vergrössert wird?

   (c) Zeigen Sie, dass durch die abgebildete Konstruktion (Figur 1) aus dem Quadrat $GERD$ mit Seitenlänge a ein **Goldenes Rechteck** $GOLD$ entsteht.



Figur 1

   (d) Eine **Raupe** befindet sich zur Zeit $t = 0$ (12:00 Uhr) in der Mitte einer Uhr auf dem Minutenzeiger. Während der Minutenzeiger sich gleichmässig um den Mittelpunkt dreht, kriecht die Raupe auf dem Zeiger mit 2 cm/min nach aussen. Führen Sie ein geeignetes Koordinatensystem ein und ermitteln Sie eine Parameterdarstellung der Bahnkurve, die die Raupe in Bezug zum Zifferblatt (Koordinatenebene) beschreibt.

2. [10P.] Die Menge der **Symmetrietransformationen** $\mathrm{Symm}(\Omega)$ einer ebenen Figur Ω sei gegeben durch $\mathrm{Symm}(\Omega) = \{I, X, Y, Z\}$.

   (a) Übertragen Sie die Tafel in Ihre Unterlagen und ergänzen Sie sie, sodass eine Gruppe entsteht.

$\circ$	I	X	Y	Z
I				
X		I		
Y				X
Z				

   (b) Skizzieren Sie eine ebene Figur Ω_1, welche die obige Symmetriegruppe besitzt. Führen Sie anschliessend geeignete Bezeichnungen ein und geben Sie *eine* mögliche 'Lösung' für X, Y, Z an.

   (c) Skizzieren Sie eine ebene Figur Ω_2, deren Symmetriegruppe gleich viele Elemente wie $\mathrm{Symm}(\Omega)$ bzw. $\mathrm{Symm}(\Omega_1)$ besitzt, die jedoch nicht die gleiche Symmetrie hat.

Bitte wenden!

3. [10P.] Ein Würfel der Kantenlänge a und ein dazu passendes reguläres Oktaeder durchdringen einander (Figur 2). Die beiden Körper bilden zusammen einen **Durchdringungskörper**. (Die Kantenmitten des Würfels fallen mit jenen des Oktaeders zusammen und werden als weitere Ecken des Durchdringungskörpers aufgefasst.)

   (a) Die Ebene durch die Punkte A, B, C, D schneidet den Durchdringungskörper: Zeichnen Sie die dadurch entstehende Schnittfigur.
   (b) Berechnen Sie das Volumen V des Durchdringungskörpers.
   (c) Ermitteln Sie die Anzahl Ecken, Kanten und Flächen des Durchdringungskörpers und verifizieren Sie die Eulersche Polyederformel. Ist der Körper konvex?

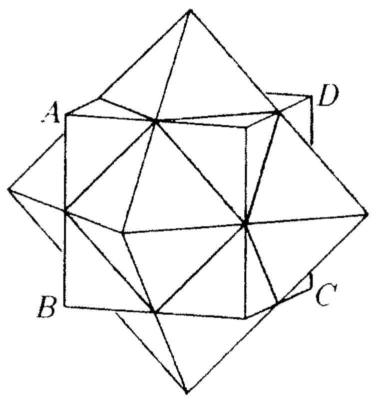
4. [10P.] Drei Geraden f, g und h schneiden sich im Punkt Z unter den Winkeln α und β, wobei $0 < \alpha, \beta < 90°$ (Figur 3).

   (a) Untersuchen Sie die **Verkettung** $T = S_h \circ S_g \circ S_f$ der drei Geradenspiegelungen S_f, S_g und S_h. Anleitung: Mit Hilfe von Satz 2.9 (vgl. Notizen zur Vorlesung) bestimmen Sie den 'Typ' der Kongruenztransformation und mit Hilfe der Bilder eines gewählten Punktes P die Lage des bestimmenden Elements, ausgedrückt durch α und β.
   (b) Untersuchen Sie den Spezialfall $\alpha = \beta = 0°$ und den Spezialfall $\alpha = \beta = 60°$ sowie die Verkettung $S_f \circ S_g \circ S_h$.
   (c) Sei $\alpha = \beta = 60°$. Welche Diedergruppe kann durch Verketten von S_f, S_g und S_h erzeugt werden? Skizzieren Sie eine ebene Figur Ω mit dieser Symmetriegruppe.

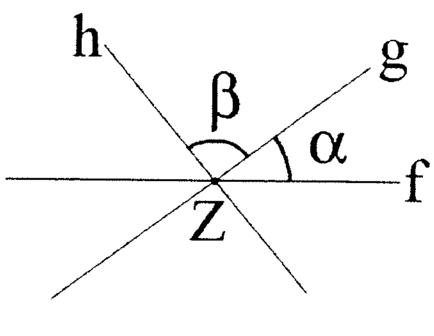
5. [10P.] Durch die folgende Parameterdarstellung wird eine **Fläche** S beschrieben

$$S : (\varphi, t) \longmapsto \vec{r} := \begin{pmatrix} t\cos\varphi \\ t\sin\varphi \\ 2t \end{pmatrix} \qquad (0 \le \varphi < 2\pi\,,\ -\infty < t < \infty)$$

   (a) Skizzieren Sie die Fläche S in ein räumliches Koordinatensystem durch ein angedeutetes Netz von φ- und t-Linien. Was für Kurven sind die φ- bzw. die t-Linien?
   (b) Leiten Sie die Koordinatengleichung (Gleichung in x, y und z) der Fläche S her.
   (c) Berechnen Sie den Normalenvektor im allgemeinen Flächenpunkt $\vec{r}_0 := \vec{r}(\varphi_0, t_0)$.
   (d) Wie ändert sich die Richtung des Normalenvektors entlang einer t Linie (t wird variiert, φ bleibt konstant)? Welche Eigenschaft der Fläche folgt aus dieser Tatsache?



Figur 2 (Aufgabe 3)



Figur 3 (Aufgabe 4)

① (a) $\mathbb{D}_1$: A, B, C, D, E, K, M, T, U, V, W, Y (1 Symmetrieachse)

$\mathbb{C}_1$: F, G, J, L, P, Q, R (keine Symmetrie)

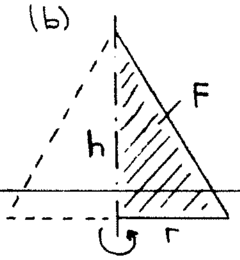
$\mathbb{D}_2$: H, I, O, (2 Symmetrieachsen)

$\mathbb{C}_2$: N, S, Z (Punktsymmetrie)

$\mathbb{D}_4$: X (4 Symmetrieachsen)

5P

(b)



λ: Massstäblicher Vergrösserungsfaktor
(2 nachher; 1 vorher)

Fläche $F_2 = \lambda^2 F_1 \overset{\text{Soll}}{=} 1.44\, F_1 \rightsquigarrow \lambda = 1.2$

Radius $r_2 = \lambda r_1$

Höhe $h_2 = \lambda h_1$

Volumen $V_2 = \frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2 = \lambda^3 V_1 = 1.728\, V_1 \rightsquigarrow \underline{\underline{72.8\%}}$

5P

(c) Idee: GOLD Goldenes Rechteck $\leftrightarrow$ $\frac{|GO|}{|GD|} = \frac{|GO|}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Pythagoras: $|MR| = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$

Rechtecklänge: $|GO| = |GM| + |MR| = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}a$

5P

(d) Koordinatensystem: Ursprung in der Uhr-Mitte
y-Achse in Richtung 12 Uhr

Radius zur Zeit t: $r(t) = 2\frac{\text{cm}}{\text{min}} \cdot t$

Winkel bez 12 Uhr : $\varphi(t) = \frac{360°}{60\,\text{min}} \cdot t = 6°/_{\text{min}} \cdot t$ oder $\frac{2\pi}{60\,\text{min}} \cdot t$

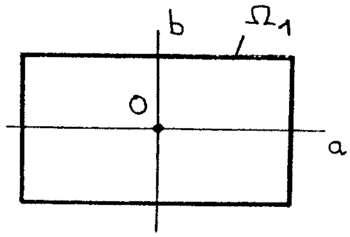
Parameterdrst. der Bahnkurve: $t \longmapsto \begin{pmatrix} r(t)\sin\varphi(t) \\ r(t)\cos\varphi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{\text{cm}}{\text{min}} \cdot t \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{60\,\text{min}} \cdot t\right) \\ 2\frac{\text{cm}}{\text{min}} \cdot t \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{60\,\text{min}} \cdot t\right) \end{pmatrix}$

5P

② (a)

∘	I	X	Y	Z
I	I	X	Y	Z
X	X	I	Z	Y
Y	Y	Z	I	X
Z	Z	Y	X	I

(b)

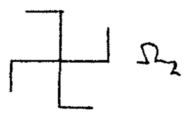


$X = R_{O,180°}$ (Halbdrehung um O)

$Y = S_a$, $Z = S_b$ (Geradenspiegelung an a bzw. b)

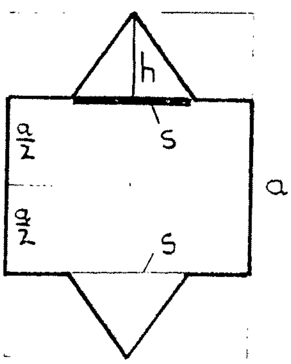
(Idee: 4 Elemente $\rightsquigarrow$ $\mathbb{D}_2$ oder $\mathbb{C}_4$, $\mathbb{C}_4$ ausschliessbar!)

(c) Idee: Figur mit $\mathbb{C}_4$



10P

③ (a)



(b) $s = \frac{|AD|}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$h = \frac{a}{2}$

$V = V_{\text{Würfel}} + 6V_{\text{Pyramide}}$ Idee

$= a^3 + 6 \cdot \frac{1}{3} s^2 h$

$= a^3 + 2 \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{a}{2}$

$= a^3 + 2 \cdot \frac{a^2 \cdot 2}{4} \cdot \frac{a}{2} = \underline{\underline{\frac{3}{2}a^3}}$

(c) $e = \overset{\text{W}}{8} + \overset{\text{O}}{6} + \overset{\text{Mitten}}{12} = 26$

$f = 6 \cdot 4 + 8 \cdot 3 = 48$

$k = 12 \cdot 2 + 12 \cdot 2 + 8 \cdot 3 = 72$

$e - k + f = 26 - 72 + 48 = 2$ ✓

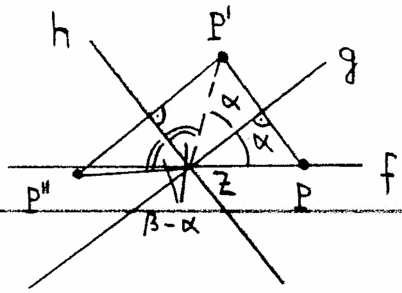
nicht konvex!

(4) (a) Z ist Fixpunkt von T (da Fixpunkt von S_f, S_g, S_h)

(T ist Kongruenztransformation, da Verkettung von Kongruenztrsf.en)

Nach Satz 2.9 ist T eine Rotation, Geradenspiegelung oder die Identität

T ist eine ungleichsinnige Kongruenztrsf (da Hintereinanderausführung von 3 Geradenspiegelungen) $\rightsquigarrow$ $\underline{T \text{ ist Geradenspiegelung}}$ (an Gerade t durch Z)



t ist Winkelhalbierende vom Winkel PZP'': $\frac{1}{2}(2\alpha + 2(\beta-\alpha)) = \underline{\underline{\beta}}$

t schneidet f unter dem Winkel β

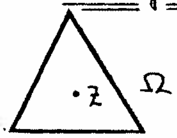
(b) $\alpha = \beta = 0°$: $f \equiv g \equiv h \rightsquigarrow T = \underline{\underline{S_f}}$

$\alpha = \beta = 60°$: $t \equiv g \rightsquigarrow T = \underline{\underline{S_g}}$

$S_f \circ S_g \circ S_h = T^{-1} = T = \underline{\underline{S_h \circ S_g \circ S_f}}$

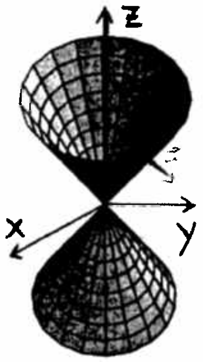
(c) S_f, S_g erzeugen $\mathbb{D}_3$ (Vgl. Löwenbrunnen Skript)

gleichseitiges Dreieck



10P

(5) (a)



t-Linien: Geraden durch den Ursprung

φ-Linien: Kreise um die z-Achse

(b) $x = t\cos\varphi$, $y = t\sin\varphi$, $z = 2t$

$$x^2 + y^2 = t^2\cos^2\varphi + t^2\sin^2\varphi = t^2\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1} = t^2 = \left(\frac{z}{2}\right)^2$$

$$\underline{\underline{x^2 + y^2 = \frac{z^2}{4}}}$$

(c) Idee: $\vec{n} = \vec{s} \times \vec{t}$

$$\vec{s} = \vec{r}_{t_0}{}'(\varphi_0) = \begin{pmatrix} -t\sin\varphi_0 \\ t\cos\varphi_0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{t} = \vec{r}_{\varphi_0}{}'(t_0) = \begin{pmatrix} \cos\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{s} \times \vec{t} = \begin{pmatrix} 2t_0\cos\varphi_0 \\ 2t_0\sin\varphi_0 \\ -t_0\sin^2\varphi_0 - t_0\cos^2\varphi_0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\vec{n} = \begin{pmatrix} 2t_0\cos\varphi_0 \\ 2t_0\sin\varphi_0 \\ -t_0 \end{pmatrix}}}$$

(d) $$\vec{n} = t_0 \underbrace{\begin{pmatrix} 2\cos\varphi_0 \\ 2\sin\varphi_0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{Richtung bleibt gleich}}$$

Länge variiert

Fläche S ist $\underline{\underline{\text{abwickelbar}}}$

10P