ETH Zürich
Dr. P. Thurnheer

Sommer 2010

Basisprüfung in Grundlagen der Mathematik I

Studiengänge Biologie, Biotechnologie, Chemie, Chemieingenieur- und Interdisziplinäre Naturwissenschaften

Bitte ausfüllen!

Name:	
Vorname:	
Legi Nr.:	

Bitte nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
Total		

Vollständigkeit	

Bitte wenden!

Wichtig:

- Es wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben lösen.
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einem Aufgabenteil, der Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- Beachten Sie, dass die einzelnen Teilaufgaben innerhalb einer Aufgabe weitgehend unabhängig voneinander gelöst werden können.
- Notieren Sie alle Zwischenresultate und Lösungswege.
- Hinter jeder (Teil-)Aufgabe steht die maximal erreichbare Punktzahl.
- Bitte schreiben Sie auf alle abgegebenen Blätter Ihren Namen und füllen Sie den Kopf des Deckblattes aus.
- Vergessen Sie nicht, alle Blätter abzugeben.

Zugelassene Hilfsmittel:

- 20 handgeschriebene A4-Seiten
- eine Formelsammlung, ein Wörterbuch
- **keine** Taschenrechner
- **kein** Handy

Siehe nächstes Blatt!

1. **a)** Beweisen Sie mit Hilfe der Eulerschen Formel die Identität

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}\right),$$

und verwenden Sie diese, um

$$2\cos^2 x = \cos(2x) + 1 \qquad (*)$$

zu zeigen. **(2 P)**

b) Berechnen Sie unter Verwendung der Formel $(*)$ das Integral

$$\int_0^{3\pi} \cos^2 x \, dx.$$

(1 P)

2. Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

(2 P)

3. Bestimmen Sie Betrag, Argument, Real- und Imaginärteil der beiden komplexen Zahlen z, für welche

$$\arg\left(\frac{z^2}{i}\right) = \frac{5\pi}{6} \qquad \text{und} \qquad \left|\frac{z^2}{1-i}\right| = 2\sqrt{2}$$

gelten. **(3 P)**

4. Geben Sie das Taylorpolynom 2. Grades der Funktion

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

um den Entwicklungspunkt $t^* = 1$ an. **(2 P)**

Bestimmen Sie sodann

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sqrt{1+x}} - \frac{1}{x}\right).$$

(2 P)

Bitte wenden!

5. Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme

a)

$$\dot{x}(t) = \frac{\cos t}{x(t)}, \qquad x(0) = 1.$$

(3 P)

b)

$$\dot{x}(t) - \frac{x(t)}{t} = t^2, \qquad x(1) = 2.$$

(4 P)

6. **a)** Bestimmen Sie die Funktion $f(y)$ so, dass das Vektorfeld

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2x \ln \frac{y}{z} \\ x^2 f(y) \\ \frac{x^2}{z} \end{pmatrix}$$

auf $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y, z > 0\}$ ein Potentialfeld ist. Begründen Sie Ihre Antwort! **(2 P)**

b) Berechnen Sie dann die Arbeit des Vektorfeldes F längs des Weges, der die Punkte $(3,1,1)$, $(5,3,2)$, $(-2,3,3)$ in dieser Reihenfolge geradlinig verbindet.

Hinweis: Verwenden Sie eine Potentialfunktion von F. **(2 P)**

7. Sei Γ die Schnittkurve der Ebene $x = z$ mit dem geraden Kreiszylinder über der Grundfläche

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 1,\ z = -10\}.$$

Berechnen Sie die Arbeit des Vektorfeldes

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ y^2 \\ -(y^2 + z^2) \end{pmatrix}$$

längs Γ (wählen Sie selbst einen Umlaufsinn)

a) direkt, das heisst, indem Sie Γ parametrisieren.

Hinweis zur Integration: Leiten Sie $\sin^3 t$ nach t ab. **(5 P)**

b) mit Hilfe des Satzes von Stokes. **(3 P)**

Siehe nächstes Blatt!

8. **a)** Berechnen Sie den Fluss (von innen nach aussen) des Vektorfeldes

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sqrt{y+5}\cos(z) \\ xy^2z \\ \ln(x+5)\ln(y+3) \end{pmatrix}$$

durch die Oberfläche des geraden dreieckigen Prismas der Höhe 3 mit den Grundflächenecken $(-2,0,0)$, $(0,2,0)$, $(2,0,0)$. **(4 P)**

b) Unabhängig von **a)**: Berechnen Sie für das Vektorfeld $F(x,y,z)$ aus **a)**

$$\operatorname{div}\operatorname{rot} F(x,y,z).$$

(2 P)

9. Sei Z der gerade Kreiszylinder über dem Kreis in der $xy-$Ebene um den Ursprung mit Radius 2.
Berechnen Sie das Volumen des endlichen Körpers, der von der Fläche

$$z = y(x^2+y^2)+10$$

aus Z herausgeschnitten wird.

Hinweis: Führen Sie geeignete neue Koordinaten ein. **(4 P)**