ETH Zürich
Dr. P. Thurnheer

Sommer 2011

Basisprüfung in Grundlagen der Mathematik I

Studiengänge Biologie, Biotechnologie, Chemie, Chemieingenieur- und Interdisziplinäre Naturwissenschaften

---

Bitte ausfüllen!

Name:	
Vorname:	
Legi Nr.:	

Bitte nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
Total		

Vollständigkeit	

Bitte wenden!

Wichtig:

- Es wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben lösen.
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einem Aufgabenteil, der Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- Beachten Sie, dass die einzelnen Teilaufgaben innerhalb einer Aufgabe weitgehend unabhängig voneinander gelöst werden können.
- Notieren Sie alle Zwischenresultate und Lösungswege.
- Hinter jeder (Teil-)Aufgabe steht die maximal erreichbare Punktzahl.
- Bitte schreiben Sie auf alle abgegebenen Blätter Ihren Namen und füllen Sie den Kopf des Deckblattes aus.
- Vergessen Sie nicht, alle Blätter abzugeben.

Zugelassene Hilfsmittel:

- 20 handgeschriebene A4-Seiten
- eine Formelsammlung, ein Wörterbuch
- **keine** Taschenrechner
- **kein** Handy

Siehe nächstes Blatt!

1. Bestimmen Sie die Gleichgewichtslösung der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = \ln(x(t)) - 1$$

und geben Sie - mit Begründung - an, um welche Art Gleichgewicht es sich handelt. **(3 P)**

2. Bestimmen Sie alle reellen Zahlenpaare (x, y), welche folgendes Gleichungssystem erfüllen:

$$\left| \begin{array}{c} (\ln(\frac{x}{e^2}))^2 + \ln(\frac{e}{y^4}) + \ln(x)\ln(\frac{1}{x}) = e^{\ln 5} \\ \\ e^x \cdot e^{x+6y} = (e^2)^4 \cdot e^{y^2} \cdot e^{\frac{2}{y}} \end{array} \right|$$

(4 P)

3. **a)** Bestimmen Sie die komplexe Zahl z, für die gilt

$$|z| = 1 \qquad \text{und} \qquad \arg z = \frac{2\pi}{3}.$$

b) Bestimmen Sie den Bildpunkt, in den der Punkt $(6, 2\sqrt{3})$ bei einer Drehung um den Ursprung um $120°$ übergeht.

c) Berechnen Sie

$$\cos\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

(6 P)

4. Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem

$$\frac{5}{2}t^3\dot{x}(t) = -\frac{1}{x(t)\sqrt{x(t)}} \qquad \text{mit} \qquad x(1) = 1.$$

(4 P)

Bitte wenden!

5. **a)** Zeigen Sie, indem Sie die trigonometrischen Funktionen durch die Exponentialfunktion darstellen (Eulersche Formel), dass gilt

$$\frac{1}{2}\left(\cos(2t)+1\right)=\cos^2(t).$$

b) Wir betrachten die in Parameterdarstellung gegebene Kurve $\mathcal{C}$

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{1}{4}\cos(2t) \\ \\ y(t)=\dfrac{1}{4}\left(\sin(2t)+2t\right) \end{cases} \qquad 0\le t\le 2\pi.$$

i) Zeigen Sie, dass die Kurve durch den Punkt $\left(0,\dfrac{\pi+2}{8}\right)$ geht und berechnen Sie die Kurvensteigung in diesem Punkt.

ii) Bestimmen Sie diejenigen Kurvenpunkte, in denen die Kurventangente parallel zur y-Achse ist.

iii) Begründen Sie, weshalb die Kurve symmetrisch zur x-Achse ist.

iv) Berechnen Sie mit Hilfe der Formel in **a)** die Länge der Kurve. **(9 P)**

6. Die linearen, homogenen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} &i) \quad \ddot{x}(t)+\frac{2}{t}\dot{x}(t)-\frac{6}{t^2}x(t)=0 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t>0 \\ &ii) \quad \ddot{x}(t)-\frac{1}{t}\dot{x}(t)+\frac{5}{t^2}x(t)=0 \end{aligned}$$

sind sogenannte *Eulersche Differentialgleichungen*. Diese können mit Hilfe des Ansatzes

$$x(t)=t^{\alpha}$$

gelöst werden. Bestimmen Sie für beide die allgemeine *reelle* Lösungsschar.

Hinweis für ii): $t^{2i}=e^{2i\ln t}$. **(9 P)**

Siehe nächstes Blatt!

7. Lösen Sie für die Funktion, gegeben durch

$$f(x, y) = x^2\sqrt{y},$$

die folgenden, weitgehend voneinander unabhängigen Aufgaben.

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und die kritischen Punkte von f. Welcher Art sind - global gesehen - die kritischen Punkte? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) In welchem Punkt auf der Geraden $x = 2$ ist die maximale Richtungsableitung von f am kleinsten? Wie gross ist sie und in welcher Richtung wird sie angenommen?

c) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Tangentialebene an das Bild von f im Punkt $(2, 4, f(2, 4))$.

d) Bestimmen Sie mit der Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$g(t) = \begin{pmatrix} \ln t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

die Ableitung der Funktion $h(t) = f(g(t))$

i) direkt, das heisst indem Sie $h(t)$ explizit angeben,

ii) mit Hilfe der Kettenregel.

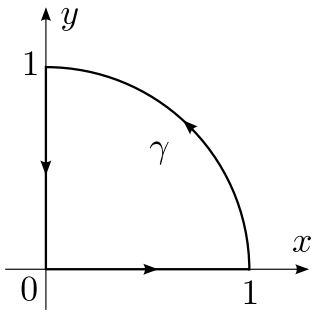
(11 P)

Bitte wenden!

8. **a)** Berechnen Sie die Arbeit des Vektorfeldes

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ (1-x^2)y \end{pmatrix}$$

längs des Weges γ:



i) direkt.

ii) mit Hilfe des Satzes von Stokes.
(Sie können dabei das Vektorfeld auffassen als

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ (1-x^2)y \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.)$$

Hinweis: $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$

b) Geben Sie zwei Begründungen, weshalb das Vektorfeld F kein Potentialfeld ist.

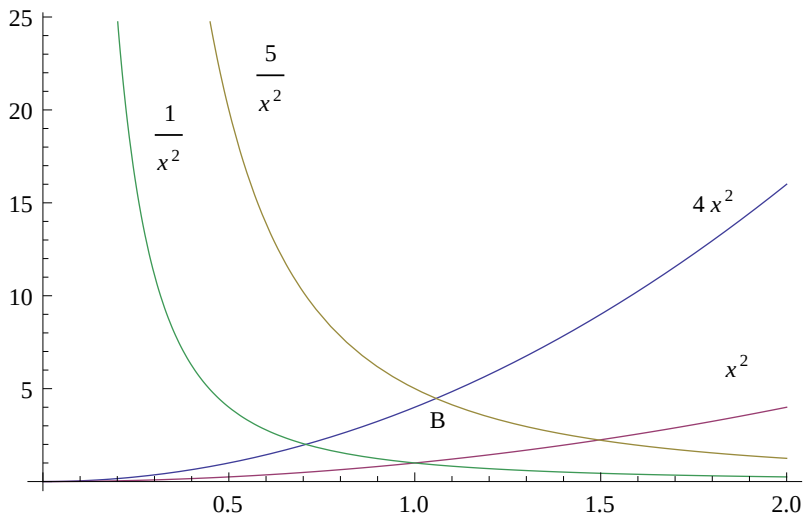
c) Ersetzen Sie die erste Komponente 0 von F durch eine Funktion $g(x,y)$ so, dass das neue Vektorfeld ein Potentialfeld ist. **(12 P)**

Siehe nächstes Blatt!

9. Integrieren Sie mit Hilfe einer geeigneten Variablentransformation die Funktion

$$f(x, y) = -4\sqrt{y}$$

über den Bereich B:



(6 P)

10. Sei k die in der Ebene $x + y + z = 3$ liegende Kreisscheibe mit Zentrum $(1, 1, 1)$ und Radius 1, und K der gerade Kreiskegel mit Grundkreis k und Spitze $(2, 2, 2)$.

a) Bestimmen Sie eine Funktion $g(x, y, z)$ so, dass der Fluss des Vektorfeldes

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + y \\ 1 \\ g(x, y, z) \end{pmatrix}$$

durch k gleich 0 ist.

b) Geben Sie ein Vektorfeld $F_2(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ an, für welches der Fluss von innen nach aussen durch die Oberfläche von K gleich 1 ist. **(6 P)**

VIEL ERFOLG!