ETH Zürich
Dr. P. Thurnheer

Sommer 2012

Basisprüfung in Grundlagen der Mathematik I

Studiengänge Biologie, Biotechnologie, Chemie, Chemieingenieur- und Interdisziplinäre Naturwissenschaften

Bitte ausfüllen!

Name:	
Vorname:	
Legi Nr.:	

Bitte nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
Total		

Vollständigkeit	

Bitte wenden!

Wichtig:

- Es wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben lösen.
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einem Aufgabenteil, der Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- Beachten Sie, dass die einzelnen Teilaufgaben innerhalb einer Aufgabe weitgehend unabhängig voneinander gelöst werden können.
- Notieren Sie alle Zwischenresultate und Lösungswege.
- Hinter jeder (Teil-)Aufgabe steht die maximal erreichbare Punktzahl.
- Bitte schreiben Sie auf alle abgegebenen Blätter Ihren Namen und füllen Sie den Kopf des Deckblattes aus.
- Vergessen Sie nicht, alle Blätter abzugeben.

Zugelassene Hilfsmittel:

- 20 handgeschriebene A4-Seiten
- eine Formelsammlung, ein Wörterbuch
- **keine** Taschenrechner
- **kein** Handy

Siehe nächstes Blatt!

1. Bestimmen Sie

a)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x+1)}-\frac{1}{x}\right)$$

b)

$$\int 3^x\cos(x)\mathrm{d}x$$

Hinweis zu (b): Ein möglicher Ansatz besteht darin, durch zweimalige partielle Integration eine Gleichung für das gesuchte Integral zu finden. **(5 P)**

2. **a)** Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen z in der Form $z = a + b\mathrm{i}$, a und b reell, für welche gilt

i) $\frac{z-3\mathrm{i}-3}{z+2+4\mathrm{i}} = \mathrm{i}$
ii) $z^3 = -27\mathrm{i}$

b) Markieren Sie in der Gauss'schen Zahlenebene die Menge der komplexen Zahlen z, für welche gilt

$$|z-1| \leq 1 \leq |z-\mathrm{i}|$$

(7 P)

3. Lösen Sie folgendes Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) - \frac{1}{t}x(t) = t\cos^2(t)\ ; \quad x(\pi) = 0.$$

(8 P)

4. **a)** Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion $x(t) = \mathrm{e}^{\sin(t)}$ an und zeigen Sie, dass $x(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) - \dot{x}(t)\cos(t) + x(t)\sin(t) = 0$$

ist.

b) Finden Sie mit Hilfe des Ansatzes $x_p(t) = a\sin(t) + b\cos(t)$ eine (partikuläre) Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t)\cos(t) + x(t)\sin(t) = 2(\sin(t) - 1).$$

(5 P)

Bitte wenden!

5. Die Fläche $\mathcal{F}$ sei gegeben durch die Koordinatengleichung

$$3x^2 + 2y^2 + z^2 = 36.$$

a) Bestimmen Sie diejenigen Punkte auf $\mathcal{F}$, in denen die Tangentialebene an die Fläche parallel zur Ebene $3x + 2y + 2z - 3 = 0$ ist.

b) Betrachten Sie die Gesamtheit der Punkte auf $\mathcal{F}$, für welche $z \geq 0$ ist. Fassen Sie diese Punktmenge auf als Bild (Graph) einer Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. In welche Richtung ist die Richtungsableitung von g im Punkt $(1, 2)$ minimal und wie gross ist dieser Minimalwert? **(10 P)**

6. Für einen räumlichen Bereich $\mathcal{G}$ und eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gelte in Kugelkoordinaten (u, v, w):

$$\iiint\limits_{\mathcal{G}} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} u^2 \cos(w)\mathrm{d}w \right) \mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u \qquad (*)$$

(verwendete Konvention: w ist der Winkel zwischen dem Punkt (x, y, z) und der (x, y)-Ebene.) Geben Sie die Funktion f explizit an, erklären Sie die geometrische Bedeutung des Dreifachintegrals (*) und berechnen Sie dieses. Beschreiben/skizzieren Sie desweiteren (gross und sauber) den Bereich $\mathcal{G}$. **(7 P)**

7. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x + y^2z^2 \\ yz^2 \\ 2\mathrm{e}^{xy} \end{pmatrix}$$

von innen nach aussen durch die Oberfläche der Kugel K mit Radius 2 und Zentrum im Ursprung.

Hinweis: $\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$ **(8 P)**

Siehe nächstes Blatt!

8. Sei $\mathcal{F}$ das Bild (der Graph) der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto f(x, y) = xy$. Sei weiterhin ∂S die Schnittkurve von $\mathcal{F}$ mit dem geraden Kreiszylinder $Z = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 = 1\}$.

a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Kurve ∂S sowie des Flächenstücks S von $\mathcal{F}$, welches innerhalb des Zylinders Z liegt (und somit durch ∂S berandet wird).

b) Bestimmen Sie die globalen Extrema von f auf $E = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$.

c) Berechnen Sie die Arbeit des Vektorfeldes

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ z \end{pmatrix}$$

längs ∂S (wählen Sie selbst einen Umlaufsinn)

i) direkt

ii) mit dem Satz von Stokes. **(18 P)**

VIEL ERFOLG!