ETH Zürich
Dr. P. Thurnheer

Sommer 2013

Basisprüfung in Grundlagen der Mathematik I

Studiengänge Biologie, Biotechnologie, Chemie, Chemieingenieurwissenschaften, Interdisziplinäre Naturwissenschaften

---

Bitte ausfüllen!

Name:	
Vorname:	
Legi Nr.:	

Bitte nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
Total		

Bitte nicht ausfüllen!

Vollständigkeit	

Bitte wenden!

Wichtig:

- Es wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben lösen.
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einem Aufgabenteil, der Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- Beachten Sie, dass die einzelnen Teilaufgaben innerhalb einer Aufgabe weitgehend unabhängig voneinander gelöst werden können.
- Notieren Sie alle Zwischenresultate und Lösungswege.
- Hinter jeder (Teil-)Aufgabe steht die maximal erreichbare Punktzahl.
- Bitte schreiben Sie auf alle abgegebenen Blätter Ihren Namen und füllen Sie den Kopf des Deckblattes aus.
- Vergessen Sie nicht, alle Blätter abzugeben.

Zugelassene Hilfsmittel:

- 20 handgeschriebene A4-Seiten
- eine Formelsammlung, ein Wörterbuch
- **keine** Taschenrechner
- **kein** Handy

Siehe nächstes Blatt!

1. Bestimmen Sie

$$\lim_{x \downarrow 0} (\ln(e^x - \cos(x)) + \ln(\sin(x)) - 2\ln(x)).$$

(3 P)

2. **a)** Geben Sie Real- und Imaginärteil, sowie Betrag und Argument der folgenden komplexen Zahl z an

$$z = \frac{2+3i}{3-2i} e^{i\frac{\pi}{3}} \frac{(1+i)^4}{\sqrt{3}+i}.$$

b) Zeigen Sie, dass die Bilder der Zahlen

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 3+4i, \quad z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(7+i)$$

in der Gaußschen Zahlenebene ein gleichschenkliges Dreieck bilden und berechnen Sie dessen Winkel. **(8 P)**

3. **a)** Zeigen Sie mit Hilfe der Eulerschen Formel, dass gilt

$$\sin^2(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t)).$$

b) Berechnen Sie

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin^2(t)\, dt.$$

(5 P)

4. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

die Umkehrfunktion der Funktion

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

ist. **(4 P)**

Bitte wenden!

5. **a)** Bestimmen Sie a und b so, dass gilt

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}.$$

Geben Sie damit nun die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) - x^2(t) + 1 = 0 \qquad (*)$$

an.

b) Sei $x^*(t)$ diejenige Lösung der Differentialgleichung $(*)$, für welche gilt $x^*(1) = -\frac{1}{2}$. Wird $x^*(t) > 0$ für genügend grosses $t > 1$? Begründen Sie Ihre Antwort. **(11 P)**

6. Integrieren Sie die Funktion

$$f(x,y) = 3y\cos((y-2x)\pi)$$

über den von den Kurven

$$y = 2x-2, \quad y = 2x+5, \quad y = -x-1, \quad y = -x+3$$

begrenzten endlichen Bereich. **(8 P)**

Siehe nächstes Blatt!

7. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x^2 y + \frac{2}{3} y^3.$$

Sei $\mathcal{F}$ das Bild der Funktion f und E die Einheitskreisscheibe in der (x, y)-Ebene,

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 0\}.$$

Lösen Sie die folgenden, weitgehend von einander unabhängigen Teilaufgaben.

a) Bestimmen Sie denjenigen Punkt auf der Geraden $y = 5$ in welchem die Richtungsableitung von f in Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ maximal ist.

b) Geben Sie eine Koordinatengleichung der Tangentialebene an $\mathcal{F}$ im Punkt $(0, 3, f(0, 3))$ an.

c) Bestimmen Sie den kritischen Punkt von f und klären Sie ab, um welche Art Punkt es sich handelt, indem Sie das Verhalten von f in der Umgebung des Punktes studieren.
Bestimmen Sie nun die absoluten Extrema von f auf E.

d) Berechnen Sie die Arbeit des Vektorfeldes

$$G(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

längs der einmal durchlaufenen Schnittkurve γ von $\mathcal{F}$ mit der Oberfläche des geraden Kreiszylinders über E:

$$\gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, (x, y, z) \in \mathcal{F},\ x^2 + y^2 = 1\}$$

i) direkt.

ii) mit Hilfe des Satzes von Stokes.
Hinweis zu ii): Führen Sie Polarkoordinaten allenfalls erst am Schluss zur Berechnung des Integrals ein.

(25 P)

Bitte wenden!

8. Sei E die Einheitskreisscheibe in der (x, y)-Ebene und L die Ebene $z = y+3$. Sei Z der gerade Kreiszylinder mit Grundfläche E und B der von Z und L begrenzte endliche Bereich.
Berechnen Sie den Fluss von innen nach aussen durch die den Bereich B berandende Fläche ∂B des Vektorfeldes

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 1 \\ 0 \\ (1 - 2x)z \end{pmatrix}$$

i) direkt.
Hinweis zu i): Führen Sie Polarkoordinaten allenfalls erst am Schluss zur Berechnung des Integrals ein.

ii) mit dem Satz von Gauss.

(12 P)

VIEL ERFOLG!