ETH Zürich
Dr. P. Thurnheer

Winter 2013

Basisprüfung in Grundlagen der Mathematik I

Studiengänge Biologie, Biotechnologie, Chemie, Chemieingenieurwissenschaften, Interdisziplinäre Naturwissenschaften

Bitte ausfüllen!

Name:	
Vorname:	
Legi Nr.:	

Bitte nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
Total		

Vollständigkeit	

Bitte wenden!

Wichtig:

- Es wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben lösen.
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einem Aufgabenteil, der Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- Beachten Sie, dass die einzelnen Teilaufgaben innerhalb einer Aufgabe weitgehend unabhängig voneinander gelöst werden können.
- Notieren Sie alle Zwischenresultate und Lösungswege.
- Hinter jeder (Teil-)Aufgabe steht die maximal erreichbare Punktzahl.
- Bitte schreiben Sie auf alle abgegebenen Blätter Ihren Namen und füllen Sie den Kopf des Deckblattes aus.
- Vergessen Sie nicht, alle Blätter abzugeben.

Zugelassene Hilfsmittel:

- 20 handgeschriebene A4-Seiten
- eine Formelsammlung, ein Wörterbuch
- **keine** Taschenrechner
- **kein** Handy

Siehe nächstes Blatt!

1. Bestimmen Sie

a) alle reellen Zahlen x, für welche gilt

$$\ln(x^{\frac{3}{2}}) + \ln(\ln(e^{\sqrt{x}})) + (\ln x)^2 + \ln\left(\frac{1}{x^3}\right) = 0.$$

b) die beiden komplexen Zahlen z in der Form $z = a + ib$, welche die folgenden beiden Bedingungen erfüllen:

$$\arg(z^3) = \arg\left(\frac{z(\sqrt{3}+i)}{i}\right)$$

und

$$\left|\frac{ze^{i\frac{\pi}{6}}}{1+i}\right| = \left|\frac{z^2}{\sqrt{2}-4i}\right|.$$

(9 P)

2. Bestimmen Sie das Taylorpolynom 3. Grades mit Zentrum $x^* = 0$ der Funktion

$$f(x) = (x+1)^{\frac{3}{2}}$$

und damit

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{3}{2x}\right).$$

(6 P)

3. Skizzieren Sie gross, sauber und qualitativ richtig die Lösungskurven des folgenden Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x^2(t)(x^2(t)-4) & (*) \\ x(0) = a \end{cases}$$

für $a = 1$ und $a = -1$.
Geben Sie zudem ein stabiles Gleichgewicht der Differentialgleichung $(*)$ an. **(4 P)**

Bitte wenden!

4. **a)** Bestimmen Sie eine Funktion, für welche das Folgende gilt: An jeder Stelle des Definitionsbereichs ist die Steigung des Bildes der Funktion proportional zum Kehrwert der Wurzel aus dem Funktionswert an dieser Stelle. Zudem soll das Bild durch die Punkte $(0, 9)$ und $(1, 1)$ gehen.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = \frac{2}{t}x(t) + \ln t.$$

(11 P)

5. Wir betrachten die durch eine Parameterdarstellung gegebene Fläche

$$\mathcal{F}_1 : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \to a(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v^2 \\ uv \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

und die durch eine Koordinatengleichung gegebene Fläche

$$\mathcal{F}_2 : f(x, y, z) = x^2 + y - 2z = 0$$

Lösen Sie die folgenden weitgehend von einander unabhängigen Aufgaben.

a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Schnittkurve von $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ an. Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte der Flächen die in der Ebene $z = 4$ liegen und beschreiben Sie die Tangentialebenen an $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ in einem derselben durch Koordinatengleichungen.

b) Geben Sie die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an, deren Bild die Fläche $\mathcal{F}_2$ ist. Diskutieren und skizzieren Sie die Niveaulinien der Funktion g. Berechnen Sie die Richtungsableitung von g im Punkt $(2, 3)$ in Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Beschreiben Sie - mit Begründung - eine Symmetrieeigenschaft der Fläche $\mathcal{F}_1$.

d) Bestimmen Sie die Ableitung der zusammengesetzten Funktion $h = f(a)$

i) direkt, das heisst, indem Sie h zuerst explizit angeben.

ii) mit Hilfe der Kettenregel.

(18 P)

Siehe nächstes Blatt!

6. Integrieren Sie die Funktion $f(x,y,z) = xyz$ über den Bereich

$$\mathcal{K}^* = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\, x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}.$$

(4 P)

7. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$G(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + \ln(1+z) \\ 2y + x^2 z^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$$

durch die Fläche

$$\mathcal{K} = \{(x,y,y) \in \mathbb{R}^3 |\, x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ und } z \geq 0\}.$$

(Sie können die Fläche selber orientieren.)

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst den Fluss durch

$$\mathcal{H} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\, x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } z = 0\}$$

und verwenden Sie anschliessend den Satz von Gauss. **(7 P)**

8. Sei γ die Schnittellipse des Zylinders

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\, x^2 + y^2 = 1\}$$

und der Ebene

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\, z = 2y\}.$$

a) Bestimmen Sie eine Funktion $g(x,y,z)$ so, dass die Arbeit des Vektorfeldes

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} g(x,y,z) \\ \sin(x^2) xz e^{xyz} \\ \sin(x^2) xy e^{xyz} \end{pmatrix}$$

längs des einmal durchlaufenen Wegs γ gleich 0 ist.

b) Berechnen Sie die Arbeit längs des einmal durchlaufenen Weges γ (wählen Sie selbst eine Orientierung) des Vektorfeldes

$$H(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2 \\ -xy \\ 0 \end{pmatrix}$$

i) direkt.

ii) mit Hilfe des Satzes von Stokes. **(11 P)**