Serie 6

1. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2-2x+3y+2)}$$

a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung und daraus eine Koordinatengleichung der Tangentialebene an das Bild von f im Punkt $O(0,0)$. Vergleichen Sie die Koordinatengleichung mit der Formel für die lineare Approximation von f in einer Umgebung von O.

b) Bestimmen Sie die Niveaulinie von f durch O und prüfen Sie nach, dass der Gradient in O senkrecht darauf steht.

c) Finden Sie denjenigen Punkt auf dem Bild von f, in dem die Tangentialebene parallel zur (x,y)-Ebene ist. Klären Sie mit Hilfe der Niveaulinien $f(x,y) = c$ (mit $c = e^{-d}$, d konstant) ab, um was für einen Punkt es sich handelt.

d) Wie muss aufgrund des Verlaufs der Niveaulinien das Bild von f aussehen?
Prüfen Sie Ihre Vermutung mit Maple.

2. Gegeben ist die Funktion

$$f : (x,y) \longmapsto \frac{y}{x^2+y^2}.$$

a) Bestimmen Sie den aufgrund der gegebenen Formel grösstmöglichen Definitionsbereich sowie den zugehörigen Wertebereich von f.

b) Diskutieren Sie die Niveaulinien von f und zeichnen Sie diese für die Funktionswerte -1, -0.5, 0, 0.5 und 1 auf.

c) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z = f(x,y)$ im Punkt $P(1,1,0.5)$.

d) In welcher Richtung ist die Richtungsableitung von f im Punkt P am grössten? Berechnen Sie diesen Wert.

3. Betrachten Sie die folgenden drei Abbildungsvorschriften:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sqrt{25-x^2-y^2} \\ g(\vartheta,\varphi) &= (5\sin\vartheta\cos\varphi, 5\sin\vartheta\sin\varphi, 5\cos\vartheta)^T \\ h(x,y,z) &= x^2+y^2+z^2 \end{aligned}$$

a) Finden Sie die "natürlichen" Definitionsbereiche $\mathbb{D}_f, \mathbb{D}_g, \mathbb{D}_h$ von f, g bzw. h,
d. h. die grösstmöglichen Mengen, auf denen die Ausdrücke für f, g bzw. h sinnvoll definiert sind. Welche Dimension haben diese Definitionsbereiche? Geben Sie auch Zielbereiche für f, g, h (z. B. $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$) an.

Bitte wenden!

b) Beschreiben Sie den Graphen von f geometrisch. Welche Fläche wird durch g parametrisiert? Beschreiben Sie die Niveaufläche von h zum Niveau 25 geometrisch.

c) Welchen Typ (Zeilenzahl, Spaltenzahl) haben die Matrizen $Df(x,y)$, $Dg(\vartheta,\varphi)$, $Dh(x,y,z)$? Berechnen Sie diese Matrizen!

Berechnen Sie $D(h \circ g)(\vartheta,\varphi)$,

d) indem Sie $h \circ g$ explizit ermitteln und dann differenzieren;

e) indem Sie die (mehrdimensionale) Kettenregel verwenden.

Vergleichen und interpretieren Sie!

f) Überzeugen Sie sich, dass der Gradient $\nabla h(x,y,z)$ in jedem Punkt $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ senkrecht auf der durch den Punkt verlaufenden Niveaufläche von h steht.

4. Online-Abgabe

Kreuzen Sie in den folgenden Aufgaben die richtigen Aussagen an.

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = (x-y)^3$.

◯ Das Bild von f ist eine Fläche, die man erhält durch Translation einer Parabel.

◯ Alle Punkte P der Geraden $y = x$ sind kritische Punkte von f

◯ Es sind Sattelpunkte, denn in unmittelbarer Nähe von P gibt es Punkte, in denen die Funktion positive und solche in denen sie negative Werte annimmt.

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy^2 - \frac{x}{4}$ und den Bereich $D = \left\{(x,y) \middle| |x| \leq 1,\ |y| \leq \frac{2}{3}\right\} \subset \mathbb{R}^2$.

◯ Der Bereich D ist ein achsenparalleles Rechteck.

◯ Die Funktion f hat genau drei kritische Punkte, welche alle in D liegen.

◯ Auf dem Randstück $x = 1$ von D gilt $\frac{1}{4} \leq f(x,y) \leq \frac{25}{36}$.

◯ Das Maximum von f auf dem Rand von D beträgt $M = \frac{3}{4}$, das Minimum $m = -\frac{49}{72}\frac{1}{36}$.

◯ Das globale Maximum von f auf D wird auf dem Rand angenommen und ist somit gleich M. Das globale Minimum wird in einem kritischen Punkt angenommen und beträgt $-\frac{1}{32}$.

◯ Einer der kritischen Punkte ist ein globales und damit lokales Minimum. Die anderen liegen auf der Niveaulinie von f zum Wert 0.

◯ Auch ein Punkt, in dem der Funktionswert 0 ist, kann ein lokales oder globales Maximum einer Funktion sein. Für die Funktion f ist dies aber nicht der Fall.

Abgabe: Freitag, 19. April, in den Übungsstunden