Serie 7

1. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \ln\big((x^2-1)y+1\big) + 4x.$$

a) Skizzieren Sie den Definitionsbereich von f. Geben Sie den Gradienten allgemein und im Punkt $P(1,1)$ an. Zu welchem Wert gehört die Niveaulinie von f durch den Punkt $P(1,1)$? Finden Sie einen Tangentialvektor an diese Linie im Punkt P.

b) Deuten Sie das Bild von f als Niveaufläche $\mathcal{F}$ einer geeigneten Funktion $F(x,y,z)$. Bestimmen Sie damit einen Normalenvektor der Tangentialebene an $\mathcal{F}$ im Punkt $Q\,(1,0,f(1,0))$ und anschliessend eine Koordinatengleichung dieser Tangentialebene.

2. Betrachten Sie die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{pmatrix} (\sqrt{x})^3 \\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) \\ y^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g(t) := \begin{pmatrix} t^2 \\ e^t \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion f an.

b) Die Funktion f definiert eine Fläche im Raum. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Tangentialebene an die Fläche im Punkt $f(1,1)$.

c) Gibt es Punkte (x_0, y_0) im Definitionsbereich von f, so dass die Tangentialebene im Punkt $f(x_0, y_0)$ parallel zur (xy)-Ebene ist? Wenn ja, geben Sie einen solchen an, wenn nein, begründen Sie.

d) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $h(t) := f(g(t))$

(i) direkt, das heisst, indem Sie $h(t)$ explizit angeben.

(ii) mit Hilfe der Kettenregel.

Bitte wenden!

3. Wir betrachten die Funktionen f und g

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \,,\; f(u,v) = \begin{pmatrix} e^{u+v} \\ e^{-u} \\ e^{2u+v} \end{pmatrix} ,$$

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \,,\; g(x,y,z) = \begin{pmatrix} \ln x + \ln y \\ \frac{z}{xy} \end{pmatrix} .$$

a) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $h = g \circ f$, sowohl indem Sie h explizit angeben und ableiten, als auch mit Hilfe der Kettenregel.

b) Fassen Sie f als Parameterdarstellung einer Fläche $\mathcal{F}$ im Raum auf. Bestimmen Sie einen Normalenvektor der Tangentialebene an $\mathcal{F}$ in dem zu $(u,v) = (0,0)$ gehörigen Flächenpunkt.

4. Online-Abgabe

Kreuzen Sie in den folgenden Aufgaben die wahren Aussagen an.

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\; (x,y) \mapsto f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

◯ Das Bild von f, die Fläche $\mathcal{F}$ ist rotationssymmetrisch zur z-Achse; es ist ein gerader Kreiszylinder.

◯ Die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\; (u,v) \mapsto h(u,v) = \begin{pmatrix} u\cos(v) \\ u\sin(v) \\ u \end{pmatrix}$,
$u \geq 0, 0 \leq v < 2\pi$, liefert eine Parametrisierung der Fläche $\mathcal{F}$.

◯ Der Vektor $\operatorname{grad} g(x,y,z)$ für die Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\; g(x,y,z) = f(x,y) - z$ steht in jedem Punkt, in dem er definiert ist, senkrecht auf $\mathcal{F}$.

◯ $\operatorname{grad} f(x,y)$ existiert nicht im Ursprung, aber f hat dort ein lokales und globales Minimum.

◯ Das globale Maximum von f auf dem Bereich $\mathcal{B} = \{(x,y) \mid |x| \leq 3, |y| \leq 5\}$ wird in zwei Randpunkten von $\mathcal{B}$ angenommen und beträgt $\sqrt{5}$.

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\; (x,y) \mapsto f(x,y) = \cos(xy)$.

◯ Die Punkte $a = (0,0), b = (1,\pi), c = (1,2\pi), d = (\frac{1}{2}, 8\pi)$ sind kritische Punkte von f.

Siehe nächstes Blatt!

- ◯ Für b und c macht $D^2 f$ keine Aussage über die Art der Punkte.
- ◯ Die Punkte c und d liegen auf derselben Niveaulinie von f.
- ◯ Die Punkte c und d sind globale Maxima, der Punkt b ist ein globales Minimum der Funktion f auf $\mathbb{R}^2$.

Abgabe: Freitag, 26.4., in den Übungsstunden