ETH Zürich
Dr. P. Thurnheer

Sommer 2010

Musterlösung zur Prüfung

1. **a)** Mit der Eulerschen Formel $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) &= \frac{1}{2}(\cos\alpha + i\sin\alpha + \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)) \\ &= \frac{1}{2}(\cos\alpha + i\sin\alpha + \cos\alpha - i\sin\alpha) \\ &= \cos\alpha\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}2\cos^2 x &= 2\left(\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})\right)^2 = \frac{1}{2}(e^{2ix} + 2e^{ix}e^{-ix} + e^{-2ix}) \\ &= 1 + \frac{1}{2}(e^{2ix} + e^{-2ix}) = 1 + \cos(2x)\end{aligned}$$

b) Mit dieser Identität ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_0^{3\pi} \cos^2 x\, dx &= \frac{1}{2}\int_0^{3\pi} (\cos(2x) + 1)\, dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin(2x)\Big|_0^{3\pi} + 3\pi\right) = \frac{3\pi}{2}\end{aligned}$$

2. Zweimaliges Anwenden der Regel von Bernoulli-de l'Hospital liefert

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

3. Mit $z = re^{i\varphi}$ und $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ folgt aus

$$\arg\left(\frac{z^2}{i}\right) = \arg\left(\frac{r^2 e^{2i\varphi}}{e^{i\frac{\pi}{2}}}\right) = \arg(e^{i(2\varphi - \frac{\pi}{2})}) = 2\varphi - \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6},$$

$$\Rightarrow \qquad \varphi_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + 2k\pi)\right), \qquad k = 0, 1$$

Bitte wenden!

und somit

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}, \qquad \varphi_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + 2\pi\right) = \frac{5\pi}{3}.$$

Andererseits ist mit $|1-i| = \sqrt{2}$

$$\left|\frac{z^2}{1-i}\right| = \frac{|z^2|}{|1-i|} = \frac{z^2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \qquad |z^2| = 4, \quad \text{also} \quad |z| = 2.$$

Damit folgt für die beiden komplexen Zahlen

$$z_1 = 2e^{i\varphi_1} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 2i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -1 + \sqrt{3}i,$$

$$z_2 = 2e^{i\varphi_2} = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + 2i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - \sqrt{3}i.$$

4. **a)** Es sind

$$\begin{aligned} f(t) &= t^{-\frac{1}{2}}, & f(1) &= 1, \\ f'(t) &= -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}, & f'(1) &= -\frac{1}{2}, \\ f''(t) &= \frac{3}{4}t^{-\frac{5}{2}}, & f''(1) &= \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} j_1^2 f(t) &= f(t^*) + f'(t^*)(t-t^*) + \frac{f''(t^*)}{2}(t-t^*)^2 \\ &= 1 - \frac{1}{2}(t-1) + \frac{3}{8}(t-1)^2 \\ &= \frac{15}{8} - \frac{5}{4}t + \frac{3}{8}t^2. \end{aligned}$$

b) Mit $f(1+x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sqrt{1+x}} - \frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{j_1^2 f(1+x)-1}{x} \\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2\right)\right) = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{8}x\right) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

5. **a)** Durch Separation der Variablen findet man

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\cos t}{x} \Leftrightarrow \int x\,dx = \int \cos t\,dt \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2(t) = \sin t + C$$
$$\Leftrightarrow x(t) = \pm\sqrt{2(\sin t + C)}.$$

Einsetzen der Anfangsbedingung führt auf

$$x(0) = 1 = \sqrt{2C} \qquad \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

Die Lösung ist somit

$$x(t) = \sqrt{2\sin t + 1}.$$

b) Wir betrachten zunächst das homogene Problem $\dot{x}_h(t) = \dfrac{x_h(t)}{t}$. Durch Separation der Variablen findet man

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} \Leftrightarrow \int \frac{dx}{x}\,dx = \int \frac{dt}{t}\,dt \Leftrightarrow \ln x = \ln t + c$$

$$\Leftrightarrow x_h(t) = Ct$$

für die allgemeine Lösung des homogenen Problems.

Für die partikuläre Lösung kann man die Methode der Variation der Konstanten anwenden. Der Ansatz $x_p(t) = C(t) \cdot t$ liefert

$$\dot{x}_p(t) - \frac{x_p(t)}{t} - t^2 = \dot{C}(t) \cdot t + C(t) - C(t) - t^2 = \Big(\dot{C}(t) - t\Big)\,t = 0,$$

woraus folgt, dass

$$C(t) = \frac{t^2}{2},$$

das heisst

$$x_p(t) = C(t) \cdot t = \frac{t^3}{2}.$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = Ct = \frac{t^3}{2} = \left(C + \frac{t^2}{2}\right)t, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Schliesslich ergibt sich aus der Anfangsbedingung

$$2 = x(1) = \frac{1}{2} + C \qquad \Rightarrow \quad C = \frac{3}{2}.$$

Die gesuchte Lösung des AWP lautet somit

$$x(t) = (t^2 + 3)\frac{t}{2}.$$

Bitte wenden!

6. Per Definition ist F ein Potentialfeld, falls ein Potential V existiert, so dass $F = \operatorname{grad} V$. Ein Potential kann wie folgt bestimmt werden:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -2x \ln \frac{y}{z} \quad \Rightarrow \quad V(x,y,z) = -x^2 \ln \frac{y}{z} + C(y,z)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{x^2}{z} + \frac{\partial C}{\partial z}(y,z) \overset{!}{=} \frac{x^2}{z} \quad \Rightarrow \quad C(y,z) = C(y)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{x^2}{y} + \frac{\partial C}{\partial y}(y) \overset{!}{=} x^2 f(y) \Rightarrow \quad C(y) = C \quad \text{und} \quad f(y) = -\frac{1}{y}$$

Es gilt dann $F = \operatorname{grad} V$ für $V = -x^2 \ln \frac{y}{z} + C, \quad C \in \mathbb{R}$.

Da es sich um ein Potentialfeld handelt, ergibt sich die Arbeit aus der Potentialdifferenz zwischen End- und Anfangspunkt, also

$$A = V(-2,3,3) - V(3,1,1) = -4 \ln 1 + C + 9 \ln 1 - C = -0 + 0 = 0.$$

7. **a)** Die Schnittkurve Γ kann z.B. durch $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$, $0 \le t \le 2\pi$ paramtriesiert werden. Mit

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} \cos^2 t + sin^2 t \\ \sin^2 t \\ -(\sin^2 t + \cos^2 t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin^2 t \\ -1 \end{pmatrix}$$

ergibt sich für die Arbeit längs Γ

$$\int_\Gamma F\, ds = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ \sin^2 t \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cdot \cos t\, dt = \frac{1}{3} \sin^3 t \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

b) Parametrisierung der Ellipse E:

$$E: \quad a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (u,v) \mapsto a(u,v) = \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ u \cos v \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} 0 \le u \le 1 \\ 0 \le v \le 2\pi \end{matrix} .$$

Siehe nächstes Blatt!

$$\Rightarrow \qquad a_u = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ \cos v \end{pmatrix}, \quad a_v = \begin{pmatrix} -u \sin v \\ u \cos v \\ -u \sin v \end{pmatrix}.$$

Normalenvektor:

$$(a_u \times a_v)_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ \cos v \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -u \sin v \\ u \cos v \\ -u \sin v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u \\ 0 \\ u \end{pmatrix}.$$

Rotation von F:

$$\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ 0 \\ -2y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rot} F(a(u,v)) = \begin{pmatrix} -2u \sin v \\ 0 \\ -2u \sin v \end{pmatrix}.$$

Und damit folg mit dem Satz von Stokes für die Arbeit:

$$\begin{aligned} A = \oint_\Gamma F\, ds &= \iint_E \langle (a_u \times a_v), \operatorname{rot} F(a(u,v)) \rangle \, du\, dv \\ &= \iint_E \begin{pmatrix} -u \\ 0 \\ u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2u \sin v \\ 0 \\ -2u \sin v \end{pmatrix} du\, dv \\ &= \iint_E (2u^2 \sin v - 2u^2 \sin v)\, du\, dv = 0. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

8. **a)** Man verwende den Satz von Gauss, wobei

$$\operatorname{div} F(x,y,z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} = \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0 + 2xyz + 0 = 2xyz$$

ist.
Damit ergibt sich für den Fluss durch die Oberfläche des Prismas P

$$\Phi_{\partial P} = \iint\limits_{D(\partial P)} \langle n, F\rangle \, du \, dv = \iiint\limits_{P} \operatorname{div} F(x,y,z) \, dx \, dy \, dz$$

$$= 2 \int_0^3 \int_0^{2-|x|} \int_{-2}^2 xyz \, dx \, dy \, dz$$

$$= 2 \int_{-2}^2 \int_0^{2-|x|} \int_0^3 xyz \, dz \, dy \, dx$$

$$= 2 \int_{-2}^2 \int_0^{2-|x|} xy \left(\frac{z^2}{2} \Big|_0^3 \right) dy \, dx$$

$$= 9 \int_{-2}^2 x \left(\frac{y^2}{2} \Big|_0^{2-|x|} \right) dx = \frac{9}{2} \int_{-2}^2 x(2-|x|)^2 \, dx$$

$$= \frac{9}{2} \left(\int_{-2}^0 x(2+x)^2 \, dx + \int_0^2 x(2-x)^2 \, dx \right)$$

$$= \frac{9}{2} \left(- \int_0^2 x(2-x)^2 \, dx + \int_0^2 x(2-x)^2 \, dx \right)$$

$$= 0.$$

b) Es ist

$$\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} \dfrac{\ln(x+5)}{(y+3)} - xy^2 \\ -\sqrt{y+5}\sin z - \dfrac{\ln(y+3)}{(x+5)} \\ y^2 z - \dfrac{\cos z}{2\sqrt{y+5}} \end{pmatrix}$$

Siehe nächstes Blatt!

Bildet man davon die Divergenz, so erhält man

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = \frac{1}{(x+5)(y+3)} - y^2 - \frac{\sin z}{2\sqrt{y+5}} - \frac{1}{(x+5)(y+3)} + y^2 + \frac{\sin z}{2\sqrt{y+5}} = 0$$

9. Die zu integrierende Funktion lautet $f(x,y) = y(x^2+y^2)+10$ und der Integrationsbereich ist die Scheibe um den Nullpunkt mit Radius 2,

$$D_2(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, x^2+y^2 \leq 4\}.$$

Es bieten sich offensichtlich Polarkoordinaten an,

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad \begin{array}{l} 0 \leq r \leq 2, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{array}$$

Damit ergibt sich für das Volumen

$$\begin{aligned}
V &= \iint\limits_{D_2(0)} (y(x^2+y^2)+10)\, dx\, dy \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r\sin\varphi(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)+10) r\, dr\, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^4 \sin\varphi\, dr\, d\varphi + 10 \int_0^{2\pi} \int_0^2 r\, dr\, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \sin\varphi \left(\frac{r^5}{5}\Big|_0^2 \right) d\varphi + 10 \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2}\Big|_0^2 \right) d\varphi \\
&= -\frac{32}{5}\cos\varphi\Big|_0^{2\pi} + 20\cdot 2\pi = 0 + 40\pi = 40\pi
\end{aligned}$$