Musterlösung zur Prüfung

1. a) Zweimalige Anwendung der Regel von Bernoulli de L'Hôpital liefert **(5 P)**

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1-x)}{\sin^2 x}\overset{\text{BdH}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)-\dfrac{x}{(1-x)}}{2\sin x\cos x}$$

$$\overset{\text{BdH}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x}-\frac{x}{1-x^2}}{2(\cos^2 x-\sin^2 x)}=-\frac{2}{2}=-1.$$

b) Partielle Integration führt auf

$$\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx=-x\cos x\Big|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\cos x\,dx=-2\pi\cos 2\pi+0-0=-2\pi.$$

2. a) Sei $w=|w|e^{i\alpha}=1-i$, dann ist **(6 P)**

$$|w|=\sqrt{(1-i)(1+i)}=\sqrt{2},\qquad \alpha=\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}.$$

Somit wird

$$\left|\frac{ze^{i\frac{7\pi}{4}}}{(1-i)^3}\right|=\frac{\left|ze^{i\frac{7\pi}{4}}\right|}{\left|\left(\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}\right)^3\right|}\Leftrightarrow\frac{|z||e^{i\frac{7\pi}{4}}|}{|e^{i\frac{21\pi}{4}}|}=|z|=2^{\frac{3}{2}}2^{\frac{1}{2}}=4.$$

Mit $i=e^{i\frac{\pi}{2}}$ ist

$$\begin{aligned}&\arg\left(\frac{z^2}{i}\right)=\arg\left(\frac{16e^{i2\varphi}}{e^{i\frac{\pi}{2}}}\right)=\arg(e^{i(2\varphi-\frac{\pi}{2})})=-\frac{\pi}{6}\\ \Leftrightarrow\quad &2\varphi-\frac{\pi}{2}+=-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\qquad k=0,1\\ \Rightarrow\quad &\varphi_1=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{6},\quad \varphi_2=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}+\pi=\frac{7\pi}{6}.\end{aligned}$$

Dies führt auf

$$\begin{aligned}z_1&=4e^{i\frac{\pi}{6}}=4\cos\frac{\pi}{6}+4i\sin\frac{\pi}{6}=2\sqrt{3}+2i\\ z_2&=4e^{i\frac{7\pi}{6}}=4\cos\frac{7\pi}{6}+4i\sin\frac{7\pi}{6}=-2\sqrt{3}-2i.\end{aligned}$$

Bitte wenden!

b)

$$z^3 = \frac{5+15i}{(1+2i)(-1+7i)} = \frac{5+15i}{-15+5i} = \frac{1+3i}{-3+i} = -\frac{10i}{10} = -i$$

Mit

$$z^3 = (re^{i\varphi})^3 = r^3 e^{3i\varphi} = -i = -e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \Rightarrow \quad r = 1$$

und somit

$$\varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi, \quad k = 0, 1, 2.$$

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \frac{\pi}{6}, & z_1 &= \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \\
\varphi_2 &= \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}, & z_2 &= \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \\
\varphi_3 &= \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}, & z_3 &= \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.
\end{aligned}$$

3. a)

$$\frac{d}{dt}\tan t = \frac{d}{dt}\frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}$$

(7 P)

b) Die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = \frac{x(t)}{\cos^2 t} + te^{\tan t}$$

ist inhomogen und erster Ordnung. Der homogene Teil kann mittels Separation der Variablen gelöst werden:

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{x(t)}{\cos^2 t} \Leftrightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} \Leftrightarrow \ln x = \frac{\sin t}{\cos t} + c \Leftrightarrow x_h(t) = e^{\tan t + c} = Ce^{\tan t}.$$

Die inhomogene Lösung kann mittels Variation der Konstanten gefunden werden. Sei

$$x_i(t) = C(t)e^{\tan t}.$$

Dann ist

$$\dot{x}_i(t) = \dot{C}(t)e^{\tan t} + \frac{C(t)}{\cos^2 t}e^{\tan t} = \frac{x}{\cos^2 t} + te^{\tan t} = \frac{C(t)}{\cos^2 t}e^{\tan t} + te^{\tan t}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{C}(t) = t \Leftrightarrow C(t) = \frac{t^2}{2}.$$

Die allgemeine Lösung ist somit

$$x(t) = x_h(t) + x_i(t) = \left(C + \frac{t^2}{2}\right)e^{\tan t}.$$

Siehe nächstes Blatt!

(5 P)

4.

$$\begin{aligned}
&\ln(z) && \Rightarrow \quad z \in \mathbb{R}_{>0} \\
&z = \sin y && \Rightarrow \quad y \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (2k\pi, (2k+1)\pi) \\
&y = x^2 && \Rightarrow \quad x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (\pm\sqrt{2k\pi}, \pm\sqrt{(2k+1)\pi})
\end{aligned}$$

Das grösste Intervall im Definitionsbereich von f, welches den Wert $x_0 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ enthält, ist somit $(0, \sqrt{\pi})$. Mit

$$f'(x) = 2x\frac{\cos(x^2)}{\sin(x^2)} = 2x\cot(x^2)$$

ergibt sich für die Steigung an der Stelle x_0

$$f'\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\cot\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

5. Es ist **(4 P)**

$$\begin{aligned}
x(t) &= 5\cos(\ln t) \\
\dot{x}(t) &= -\frac{5\sin(\ln t)}{t} \\
\ddot{x}(t) &= -\frac{5\cos(\ln t)}{t^2} + \frac{5\sin(\ln t)}{t^2}.
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$-\frac{5\cos(\ln t)}{t^2} + \frac{5\sin(\ln t)}{t^2} - \frac{5\sin(\ln t)}{t^2} + \frac{5\cos(\ln t)}{t^2} = 0.$$

6. Der Gradient von f an der Stelle a, **(6 P)**

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} f_x(a) \\ f_y(a) \end{pmatrix},$$

steht senkrecht zum Tangentialvektor an die Niveaulinie von f durch $\vec{a}$

$$\left\langle \begin{pmatrix} f_x(a) \\ f_y(a) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = f_x - 2f_y = 0. \qquad (1)$$

Der Einheitsvektor in Richtung

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

errechnet sich aus

$$\left| \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

zu

$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und dies liefert

$$\begin{aligned} D_{\vec{e}} f(a) = \langle \nabla f(a), \vec{e} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} f_x(a) \\ f_y(a) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{3}{\sqrt{10}} f_x - \frac{1}{\sqrt{10}} f_y = \sqrt{\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

Also ist

$$3f_x - f_y = \sqrt{25} = 5. \qquad (2)$$

Aus (1) folgt nun

$$f_x = 2f_y$$

und dies, eingesetzt in (2), ergibt

$$6f_y - f_y = 5f_y = 5 \quad \Leftrightarrow \quad f_y = 1, \quad f_x = 2,$$

also

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Richtungsableitung ist am kleinsten in Richtung des negativen Gradienten

$$-\nabla f(a) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und ihr Wert beträgt

$$D_{-\nabla f(a)} f(a) = \frac{\langle \nabla f(a), -\nabla f(a) \rangle}{|\nabla f(a)|} = -|\nabla f(a)| = -\sqrt{5}.$$

7. Der Tangentenvektor an C ist **(4 P)**

$$\dot{f}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2\sin 2t - 2\cos t \\ \frac{t^2-1}{2t} \end{pmatrix}.$$

Die Tangente ist also parallel zur xz-Ebene, wenn der Tangentenvektor senkrecht zur Normalen der Ebene steht:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2\sin 2t - 2\cos t \\ \frac{t^2-1}{2t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2\sin 2t - 2\cos t = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -4\sin t\cos t = 2\cos t \quad \Leftrightarrow \quad \sin t = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow t_0 = \frac{7\pi}{6}, \quad t_1 = \frac{11\pi}{6}.$$

Siehe nächstes Blatt!

(12 P)

8. **a)** Die Funktion $\sqrt{u}$ ist nur für nichtnegative Werte von u definiert, $\dfrac{u}{v}$ fordert $v \neq 0$ und wegen $\ln \frac{u}{v}$ muss schliesslich $v > 0$ sein. Der maximale Definitionsbereich von f ist somit $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

b) Die Vektoren

$$\frac{\partial f}{\partial u}(1,1) = f_u(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{u} \\ \frac{1}{u} \\ 0 \end{pmatrix}_{(1,1)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(1,1) = f_v(1,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{v} \\ 2v \end{pmatrix}_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

liegen in der Tangentialebene T_p an E im Punkt $P = f(1,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Damit ist

$$n = f_u(1,1) \times f_v(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

ein Normalenvektor auf T_p. Eine Koordinatengleichung für T_p ist dann

$$\left\langle f_u(1,1) \times f_v(1,1), \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - f(1,1) \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} \right\rangle = 2x - 3y - \frac{3}{2}z - \frac{1}{2} = 0.$$

c) **i)**

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

$$t \mapsto f(g(t)) = h(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{t^2}^3 \\ \ln(\frac{t^2}{e^t}) \\ (e^t)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^3 \\ \ln(t^2) - t \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\dot{h}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ \frac{2}{t} - 1 \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

ii)

$$\frac{d}{dt}(f(g(t))) = df(g(t)) \cdot dg(t)$$

Bitte wenden!

$$df(g(t)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{pmatrix}_{(t^2,e^t)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{u} & 0 \\ \frac{1}{u} & -\frac{1}{v} \\ 0 & 2v \end{pmatrix}_{(t^2,e^t)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}t & 0 \\ \frac{1}{t^2} & -\frac{1}{e^t} \\ 0 & 2e^t \end{pmatrix}$$

$$dg(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t} \\ \frac{\partial g_2}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ e^t \end{pmatrix}$$

$$df(g(t)) \cdot dg(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}t & 0 \\ \frac{1}{t^2} & -\frac{1}{e^t} \\ 0 & 2e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ \frac{2}{t} - 1 \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

9. F ist genau dann ein Potentialfeld, wenn eine skalare Funktion $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ existiert, so dass $F(x, y, z) = \nabla V(x, y, z)$. Das heisst nun **(6 P)**

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y^2}{xz} \quad \Rightarrow \quad V(x, y, z) = \frac{y^2}{z} \ln x + C(y, z)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{2y}{z} \ln x + C(y, z) \overset{!}{=} \frac{2y}{z} \ln x \quad \Rightarrow \quad C(y, z) = C(z),$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{y^2}{z^2} \ln x + C'(z).$$

Also erfüllt zum Beispiel

$$f(x, y, z) = -\frac{y^2}{z^2} \ln x$$

die geforderten Bedingungen.
Da in einem Potentialfeld die Arbeit entlang eines Weges nur vom Anfangs- und vom Endpunkt abhängt, findet man für diese

$$A = \int_\gamma F = V(C) - V(A) = V(e, 3, 3) - V(1, 1, 1) = \frac{9}{3} \ln e - 1 \ln(1) = 3.$$

10. Nach dem Satz von Gauss gilt **(5 P)**

Siehe nächstes Blatt!

$$\Phi_P = \iint\limits_{\partial P} \langle n, F\rangle \, d\sigma = \iiint\limits_{P} \operatorname{div} F dx\, dy\, dz$$

wobei n der nach aussen gerichtete Normalenvektor, ∂P die Oberfläche des Parallelflachs und $d\sigma$ das Oberflächenelement bezeichnen. Die Divergenz des Vektorfeldes F beträgt

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 3x^2 + 1 + 1 - 3x^2 = 2,$$

und das Volumen von P ist

$$\left|\overrightarrow{OC} \cdot \left(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right)\right| = \left|\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\5\\2\end{pmatrix}\right)\right| = \left|\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-5\\-8\\20\end{pmatrix}\right| = |-15-24+60| = 21.$$

Somit ergibt sich für den Fluss von innen nach aussen von F durch die Oberfläche von P

$$\Phi_P = \iiint\limits_{P} 2\, dx\, dy\, dz = 2 \cdot 21 = 42.$$

11. a) i) **(10 P)**

$$\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}F_1\\F_2\\F_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}xz\\-yz\\0\end{pmatrix}.$$

Da die Rotation von F nicht verschwindet, ist das Vektorfeld *nicht* wirbelfrei.

ii) Wirbelfreiheit ist eine notwendige Bedingung für ein Potentialfeld. Somit kann F keines sein.

b) Der Satz von Stokes besagt

$$A = \oint\limits_{\partial E} F = \int\limits_a^b \langle F(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle \, dt = \iint\limits_E \langle n, \operatorname{rot} F(a(u,v))\rangle \, du\, dv,$$

wobei A die Arbeit des Feldes F entlang des Randes ∂E der Fläche E und n eine Flächennormale bezeichnen. Mit

$$a_u = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad a_v = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

ergibt sich für die nach aussen gerichtete Flächennormale n

$$n = a_u \times a_v = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

und aus **a)i)**

$$\operatorname{rot} F(a(u,v)) = \begin{pmatrix} uv \\ -v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Arbeit entlang ∂E ist somit

$$A = \int_1^3 \int_0^2 \begin{pmatrix} uv \\ -v \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \, du \, dv = 0.$$

c) Nein, es ist kein Widerspruch. Ein Potentialfeld liegt vor, wenn die Arbeit entlang *jedes* geschlossenen Weges gleich 0 ist.