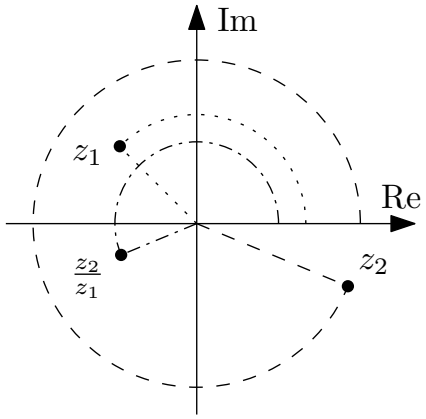
Musterlösung zur Prüfung

1. a) $\arg\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right) = \varphi_2 - \varphi_1$



b) In der Polardarstellung sind $z_i = r_i e^{i\varphi_i}$ wobei $i = 1, 2, 3$, das heisst

$$\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \left|\frac{r_2 e^{i\varphi_2}}{r_1 e^{i\varphi_1}}\right| = \frac{r_2}{r_1} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad r_1 = \frac{r_2}{\sqrt{2}}$$

$$\arg\frac{z_2}{z_1} = \arg\frac{r_2}{r_1}e^{i(\varphi_2-\varphi_1)} = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = \varphi_2 - \frac{\pi}{3}$$

$$\left|\frac{z_3}{z_2}\right| = \left|\frac{r_3 e^{i\varphi_3}}{r_2 e^{i\varphi_2}}\right| = \frac{r_3}{r_2} = \sqrt{8} \quad \Rightarrow \quad r_3 = r_2\sqrt{8}$$

$$\arg\frac{z_3}{z_2} = \arg\frac{r_3}{r_2}e^{i(\varphi_3-\varphi_2)} = \varphi_3 - \varphi_2 = \frac{8\pi}{9} \quad \Rightarrow \quad \varphi_3 = \frac{8\pi}{9} + \varphi_2.$$

Damit folgt

$$\left|\frac{z_1}{z_3}\right| = \left|\frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_3 e^{i\varphi_3}}\right| = \frac{r_1}{r_3} = \frac{\frac{r_2}{\sqrt{2}}}{r_2\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}$$

$$\arg\frac{z_1}{z_3} = \arg\frac{r_1}{r_3}e^{i(\varphi_1-\varphi_3)} = \varphi_1 - \varphi_3 = \varphi_2 - \frac{\pi}{3} - \frac{8\pi}{9} - \varphi_2 = -\frac{11\pi}{9}$$

Bitte wenden!

2. a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{\tan x}\overset{\text{BdH}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x}{x+1}=1.$$

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)+\pi}{\tan(x)+1}=\frac{\lim_{x\to 0}\ln(x+1)+\pi}{\lim_{x\to 0}\tan(x)+1}=\pi.$$

3. a) Die Tangentengleichung lautet

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

Mit

$$y=f(x)=\ln x-\frac{x}{4},\qquad f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{4}$$

findet man

$$f(1)=\ln 1-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4},\qquad f'(1)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

Einsetzen in die Tangentengleichung an der Stelle $(1,f(1))=(1,-\frac{1}{4})$ liefert

$$y=f(1)+f'(1)(x-1)=-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}(x-1)=\frac{3}{4}x-1.$$

Um den Schnittpunkt x_1 der Tangente mit der x-Achse zu bestimmen, betrachtet man

$$0=-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}x_1-\frac{3}{4}\qquad\Leftrightarrow\qquad x_1=\frac{4}{3}$$

b) Die Rekursionsformel des Newton-Verfahrens lautet

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Fasst man nun $x_1=\frac{4}{3}$ als ersten Schritt in diesem Verfahren auf, so liefert dies

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Mit

$$f\left(\frac{4}{3}\right)=\ln\left(\frac{4}{3}\right)-\frac{1}{3}$$

und

$$f'\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

erhält man schliesslich

$$x_2=\frac{4}{3}-\frac{\ln(\frac{4}{3})-\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{4}{3}-2\ln\left(\frac{4}{3}\right)+\frac{2}{3}=2\left(1-\ln\left(\frac{4}{3}\right)\right).$$

Siehe nächstes Blatt!

4. Der homogene Teil kann mittels Separation der Variablen gelöst werden

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t} \Leftrightarrow \int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dt}{t} \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = -\ln t + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow x_h(t) = \frac{C}{t}, \quad t > 0.$$

Die inhomogene Lösung findet man mittels Variation der Konstanten:
Mit dem Ansatz

$$x(t) = \frac{C(t)}{t}$$

findet man

$$\dot{x}(t) = \frac{\dot{C}(t)}{t} - \frac{C(t)}{t^2} = \cos(2t) - \frac{C(t)}{t^2}$$
$$\Rightarrow \dot{C}(t) = t\cos(2t).$$

Partielle Integration liefert

$$C(t) = \int t\cos(2t) = \frac{t}{2}\sin(2t) - \frac{1}{2}\int \sin(2t)$$
$$= \frac{t}{2}\sin(2t) + \frac{1}{4}\cos(2t).$$

$$\Rightarrow x_i(t) = \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{4t}\cos(2t).$$

Damit lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x(t) = x_h(t) + x_i(t) = \frac{C}{t} + \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{4t}\cos(2t).$$

Die Anfangsbedingung bestimmt die Konstante:

$$x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 = \frac{4C}{\pi} + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4C}{\pi} + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{\pi}{8}.$$

Die Lösung des Anfangwertproblems ist also

$$x(t) = \frac{\pi}{8t} + \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{4t}\cos(2t).$$

5. a) Der kritische Punkt muss folgende Bedingung erfüllen

$$\frac{\partial S}{\partial m} = 0 = 2(m + q - 2) + 4(2m + q + 1)$$
$$= 10m + 6q$$

Bitte wenden!

$$\frac{\partial S}{\partial q} = 0 = 2q + 2(m + q - 2) + 2(2m + q + 1)$$
$$= 6q + 6m - 2.$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$m = -\frac{3}{5}q,$$

und Einsetzen in die zweite liefert

$$6q - \frac{18}{5}q - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{12}{5}q = 2 \Leftrightarrow q = \frac{5}{6}$$

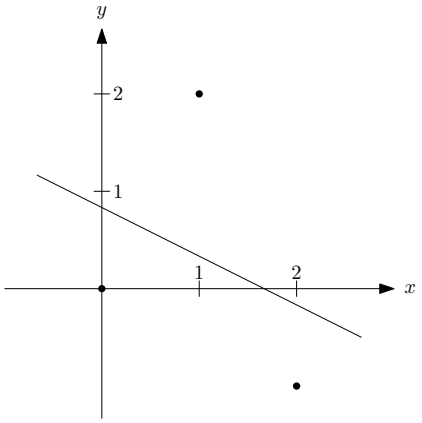
$$\Rightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

Der kritische Punkt ist also $(m_0, q_0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right)$, an dieser Stelle hat die Funktion $S(m, q)$ also ein Extremum. Da es sich um eine quadratische Funktion mit ausschliesslich positiven Koeffizienten handelt, kann sie nur steigend sein. Die Extremalstelle stellt also ein Minimum dar.

b) Im Sinne der Gaussschen Methode der kleinsten Quadrate stellen m_0 die Steigung und q_0 den y-Achsenabschnitt der Regressionsgeraden

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{6}$$

dar.



6. a) Sei $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Mit

$$e = \frac{v}{|v|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (-1)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Siehe nächstes Blatt!

und

$$(\operatorname{grad} f)_{(1,\frac{\pi}{2})} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}_{(1,\frac{\pi}{2})} = \begin{pmatrix} \sin(xy) + xy\cos(xy) \\ x^2\cos(xy) \end{pmatrix}_{(1,\frac{\pi}{2})} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ergibt sich für die Richtungsableitung

$$D_e(f)_{(1,\frac{\pi}{2})} = \langle (\operatorname{grad} f)_{(1,\frac{\pi}{2})}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b) Da $\operatorname{grad} f$ in Richtung der maximalen Änderungsrate von f zeigt und

$$D_e(f)_{(1,\frac{\pi}{2})} = |(\operatorname{grad} f)_{(1,\frac{\pi}{2})}| \cos\varphi$$

ist die Richtungsableitung minimal, wenn $\varphi = \pi$ ist und hat dort den Wert

$$\cos\varphi |(\operatorname{grad} f)_{(1,\frac{\pi}{2})}| = -\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = -1.$$

7. a) Direkt:

$$h(t) = (g \circ f)(t) = g(f(t)) = g(\ln t, t^2) = e^{\ln t}(t^2)^2 = tt^4 = t^5.$$

Damit

$$h'(t) = 5t^4.$$

b) Mit Hilfe der Kettenregel $D(g(f(t)) = Dg(f(t)) \cdot Df(t)$:

$$Df(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ 2t \end{pmatrix}$$

$$Dg(u,v) = (e^u v^2 \quad 2ve^u)$$

$$\Rightarrow Dh(t) = Dg(\ln t, t^2) \cdot Df(t) = (e^{\ln t}(t^2)^2 \quad 2e^{\ln t}t^2) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ 2t \end{pmatrix} = (t^5 \quad 2t^3) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ 2t \end{pmatrix} = t^4 + 4t^4 = 5t^4.$$

8. a) Betrachte erst die Kurve u

$$a_{(u,\pi)} = \begin{pmatrix} \ln u \cdot \sin\pi \\ 2\sqrt{u} \cdot \cos\pi \\ u^2\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sqrt{u} \\ u^2\pi \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

und den Tangentialvektor daran

$$t_u = \left.\frac{\partial a}{\partial u}\right|_{u=1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{u}} \\ 2u\pi \end{pmatrix}_{u=1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2\pi \end{pmatrix}$$

und analog die Kurve v

$$a_{(1,v)} = \begin{pmatrix} \ln 1 \cdot \sin v \\ 2\sqrt{1} \cdot \cos v \\ 1v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\cos v \\ v \end{pmatrix}$$

und den Tangentialvektor daran

$$t_v = \left.\frac{\partial a}{\partial v}\right|_{v=\pi} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sin v \\ 1 \end{pmatrix}_{v=\pi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Parameterdarstellung der Tangentialebene am Punkt $a_{(1,\pi)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ \pi \end{pmatrix}$ lautet somit

$$T_{(h,k)} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ \pi \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2\pi \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus erhält man die Koordinatengleichung der Tangentialebene:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2\pi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_p = \langle t_u \times t_v, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - a(1,\pi) \rangle = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ \pi \end{pmatrix} \rangle = -x = 0.$$

Die fragliche Ebene ist also die (y,z)-Ebene ($x = 0$).

b) Der Gradient

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x-4 \\ 2y-6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

steht senkrecht zur Tangentialebene und diese ist parallel zur (x,y)-Ebene, also gilt

$$\begin{aligned} 2x - 4 &= 0, \qquad &\Rightarrow \qquad x &= 2, \\ 2y - 6 &= 0, \qquad &\Rightarrow \qquad y &= 3. \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Aus

$$1 = f(2,3,z) = 4 - 8 + 9 - 18 + z = z - 13$$

folgt dann $z = 14$.

9. Die Arbeit A eines Vetorfeldes F lägs einer Kurve γ mit Endpunkten a und b ist gegeben durch

$$A = \int_\gamma F = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle dt.$$

Hier ist

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} 2x^2y - 2e^{x^2} \\ -x^2y + e^{x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u \\ u \end{pmatrix}$$

wobei $u = -x^2y + e^x$, also steht F senkrecht zu den Seiten γ_2 und γ_4. Die verrichtete Arbeit auf diesen Teilstrecken ist somit gleich 0.

a) Parametrisieren der einzelnen Streckenzüge:

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1], \qquad \dot\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1], \qquad \dot\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Die totale Arbeit ergibt sich also aus der Summe der Arbeiten entlang γ_1 und γ_3:

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 \langle F(\gamma_1(t)), \dot\gamma_1(t)\rangle dt + \int_0^1 \langle F(\gamma_3(t)), \dot\gamma_3(t)\rangle dt \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} 2(-1+4t)^2(1+2t) - 2e^{(-1+4t)^2} \\ -(-1+4t)^2(1+2t) + e^{(-1+4t)^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} dt \\
&+ \int_0^1 \begin{pmatrix} 2(1-4t)^2(-1-2t) - 2e^{(1+4t)^2} \\ -(-1-4t)^2(-1-2t) + e^{(1-4t)^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} dt \\
&= 12 \int_0^1 (-1+4t)^2(1+2t) dt \\
&= 12 \int_0^1 (1 - 6t + 32t^3) dt \\
&= 12(t - 3t^2 + 8t^4)\Big|_0^1 \\
&= 12(1 - 3 + 8) = 72
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

b) $F(x,y)$ Potentialfeld $\Leftrightarrow$ es gibt $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass $F(x,y) = \operatorname{grad} V(x)$, also

$$\begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial V}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}.$$

Gesucht ist nun eine Funktion $g(x,y)$, so dass

$$F \begin{pmatrix} g(x,y) \\ -x^2y + e^{x^2} \end{pmatrix} = \operatorname{grad} V.$$

Das heisst

$$\frac{\partial V}{\partial y}(x,y) = -x^2y + e^{x^2} \qquad \Rightarrow \qquad V(x,y) = -\frac{1}{2}x^2y^2 + ye^{x^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) = -xy^2 + 2xye^{x^2} + C = g(x,y).$$

10. Der Fluss des Vektorfeldes

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} - x \\ -\frac{x^2}{2} + x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei $a = \frac{x^2}{2} - x$, ist gleich 0 durch die Grundfläche (Normalenvektor nur in z-Richtung) und die Deckfläche (Normalenvektor gleichermassen in x- und y-Richtung, hebt sich also auf).
Ausserdem verschwindet er auch in der y-z-Ebene, da dort $x = 0$ ist.

a) Man verwende den Satz von Gauss, wobei

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = x - 1$$

ist.

Siehe nächstes Blatt!

Somit ergibt sich für den Fluss

$$\begin{aligned}
\Phi_{\partial T} &= \iint\limits_{D(\partial T)} \langle F, n\rangle dudv = \iiint\limits_{T} \operatorname{div} F(x,y,z)dxdydz \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (x-1)dxdydz = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x-1)(1-x-y)dydx \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} -(x-1)^2 + y(1-x)dydx = \int_0^1 -(x-1)^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{2}dx \\
&= \int_0^1 -(1-x)^3 + \frac{(1-x)^3}{2}dx \\
&= \int_0^1 -\frac{(1-x)^3}{2}dx \\
&= \frac{(1-x)^4}{8}\bigg|_0^1 = -\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

b) Es bleibt noch der Fluss durch die Seite in der x-z-Ebene zu bestimmen:
Parametrisierung des Dreiecks:

$$a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$(u,v) \mapsto a(u,v) = u\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u\\0\\v\end{pmatrix} = \begin{cases}0 \le u \le 1\\ 0 \le v \le 1-u\end{cases}$$

Normalenvektor:

$$\vec{n} = a_u \times a_v = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

Fluss:

$$\begin{aligned}
\Phi_{xz} &= \int_0^1 \int_0^{1-u} \langle v, F(a(u,v))\rangle dvdu \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-u} \langle \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{u^2}{2} - u\\ -\frac{u^2}{2} + u\\ 0\end{pmatrix}\rangle dvdu \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-u} \frac{u^2}{2} - u\, dvdu \\
&= \int_0^1 (\frac{u^2}{2} - u)(1-u)\, du \\
&= \int_0^1 -\frac{u^3}{2} + \frac{3u^2}{2} - u\, du \\
&= -\frac{u^4}{8} + \frac{3u^3}{6} - \frac{u^2}{2}\bigg|_0^1 = -\frac{1}{8}.
\end{aligned}$$