Lösungen zur Serie 10

1. Wir betrachten die Vektoren

$$F_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2\,x\,y + \cos x \cos y \\ x^2 - \sin x \sin y \end{pmatrix} \; ; \; F_2(x,y) = \begin{pmatrix} -x\,y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} .$$

a) Für jedes Vektorfeld müssen wir verifizieren, ob $\operatorname{rot} F = \partial_x F_y - \partial_y F_X = 0$ ist.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F_1 &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - \sin x \sin y\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(2\,x\,y + \cos x \cos y\right) = \\ &= 2\,x - \cos x \sin y - (2\,x - \cos x \sin y) = 0 \end{aligned}$$

$$\operatorname{rot} F_2 = \frac{\partial}{\partial x}\left(y^3\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-x\,y^2\right) = 0 - (-2\,x\,y) \neq 0$$

Damit ist F_1 wirbelfrei, F_2 nicht wirbelfrei.

b) Wirbelfreiheit ist eine notwendige Bedingung für ein Potentialfeld, somit ist F_2 wegen $\operatorname{rot} F_2(x,y) \neq 0$ keines. Falls F_1 eines ist, existiert ein Potential V_1 mit $\nabla V_1 = F_1$. Das bedeutet

$$V_1(x,y) = \int (2\,x\,y + \cos x \cos y)\,dx + C(y) = x^2 y + \sin x \cos y + C(y)$$

Um die "Integrationskonstante" C zu bestimmen, leiten wir das Potential nach y ab und vergleichen das Resultat mit der zweiten Komponente von F_1

$$\frac{\partial V_2}{\partial y} = x^2 - \sin x \sin y + \frac{\partial C}{\partial y} = x^2 y - \sin x \sin y\,.$$

Also ist $C(y) = c \in \mathbb{R}$ wirklich konstant und somit erhalten wir als Potential von F_1

$$V_1(x,y) = x^2 y + \sin x \cos y + c\,.$$

F_1 ist somit ein Potentialfeld.

Bitte wenden!

c) Da F_1 ein Potentialfeld mit Potential V_1 ist, verschwindet die Arbeit längs eines geschlossenen[1] Weges γ.

$$A_1 = \oint_{\gamma_1} F \cdot ds = V(\gamma(0)) - V(\gamma(1)) = 0$$

Im Fall von F_2 mussen wir die Arbeit explizit berechnen. Wir wählen die folgende stückweise Parametrisierung von γ

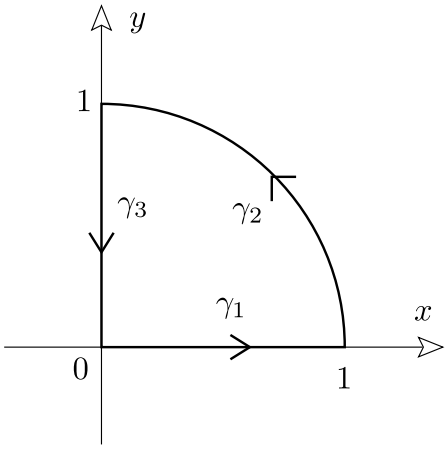
$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} -1+t \\ t \end{pmatrix} \text{ mit } t \in [0,1] \quad \text{und} \quad \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \text{ mit } t \in [\pi/2, \pi]\,,$$

wobei γ_1 bzw. γ_2 die Strecke bzw. den Viertelkreis entspricht.

Die Arbeit von F_2 entlang $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ ist somit

$$\begin{aligned}
A_2 &= \oint_\gamma F_2 = \int_{\gamma_1} F_2 + \int_{\gamma_2} F_2 = \\
&= \int_0^1 F_2(\gamma_1(t)) \cdot \dot\gamma_1(t)\, dt + \int_{\pi/2}^{\pi} F_2(\gamma_2(t)) \cdot \dot\gamma_2(t)\, dt = \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} -(t-1)t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \begin{pmatrix} -\cos t \sin^2 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt \; = \\
&= \int_0^1 (-t^3 + t^2 + t^3)\, dt + 2 \int_{\pi/2}^{\pi} \cos t \sin^3 t\, dt \; = \\
&= \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{2}{4}\, \sin^4 t\Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{1}{3}(1-0) + \frac{1}{2}(0-1) = -\frac{1}{6}\,.
\end{aligned}$$

2. **a)** Wir zerlegen den Weg γ in die Teilstücke $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$



[1] d.h. $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$

Siehe nächstes Blatt!

Für die entsprechende Parametrisierung findet man

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2\,, && t \to \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, && \dot\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};\\
&\gamma_2 : [0,\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2\,, && t \to \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, && \dot\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix};\\
&\gamma_3 : [0,1] \to \mathbb{R}^2\,, && t \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \end{pmatrix}, && \dot\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Arbeit

$$\begin{aligned}
A &= \int_\gamma F = \int_{\gamma_1} F + \int_{\gamma_2} F + \int_{\gamma_3} F = \int_0^1 \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \\
&+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt + \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt = \\
&= \int_0^1 t\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t\,dt + \int_0^1 (t-1)\,dt = \\
&= \frac{t^2}{1}\Big|_0^1 + \frac{\sin^3 t}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{t^2}{2} - t\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

b) F ist mit **a)** kein Potentialfeld. Folgende Begründungen sind möglich:

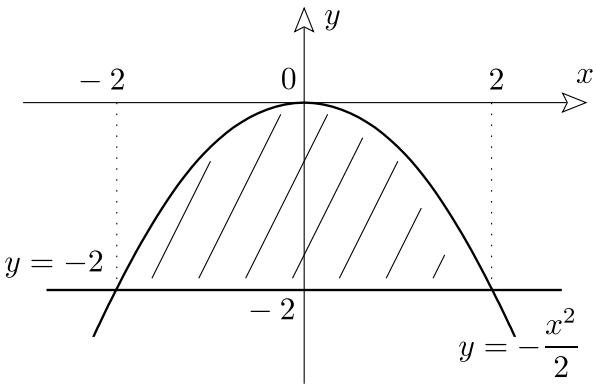
- Die Arbeit entlang des Weges γ ist nicht null, was für ein Potentialfeld eine notwendige Bedingung wäre.
- Das Feld F ist wegen $\operatorname{rot} F = x \neq 0$ nicht wirbelfrei.
- Es existiert keine Potentialfunktion $V(x,y)$ mit $\nabla V(x,y) = F(x,y)$. Wäre z.B. $F_1(x,y) = x - x\,y = \partial_x V(x,y)$, sollte eine $C = C(y)$ existieren, so dass $V(x,y) = \int(\partial_x V)dx = \frac{1}{2}x^2(1-y) + C(y)$.
  Die "Integrationskonstante" C müsste dann

  $$\frac{\partial}{\partial y} V(x,y) = -\frac{1}{2}x^2 + C'(y) = y$$

  was zu einem Wiederspruch führt.

3. Der gegebene Bereich liegt zwischen der Parabel $y = -\frac{x^2}{2}$ und der Gerade $y = -2$.

Bitte wenden!



Das zu betrachtende Integral kann man wie folgt bestimmen.

$$\iint\limits_D (\sqrt{-y}+x)\,dx\,dy = \int_{-2}^{2}\left(\int\limits_{-2}^{-x^2/2}(\sqrt{-y}+x)\,dy\right)dx =$$

$$= \int_{-2}^{2}\left(\frac{2}{3}\,y\,\sqrt{-y}+x\,y\right)\Bigg|_{-2}^{-x^2/2}dx = \int_{-2}^{2}\left(-\frac{x^2}{3}\frac{|x|}{\sqrt{2}}-\frac{x^3}{2}-\left(-\frac{4}{3}\sqrt{2}-2\,x\right)\right)dx =$$

$$= 2\int_{0}^{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{6}\,x^3+\frac{4}{3}\sqrt{2}\right)dx = -2\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1}{2}\frac{x^4}{4}-4\,x\right)\Bigg|_{0}^{2} = 4\sqrt{2}$$

Andererseits, ist auch

$$\iint\limits_D (\sqrt{-y}+x)\,dx\,dy = \int_{-2}^{0}\left(\int\limits_{-\sqrt{-2\,y}}^{\sqrt{-2\,y}}(\sqrt{-y}+x)\,dx\right)dy = \int_{-2}^{0}\left(x\sqrt{-y}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\sqrt{-2\,y}}^{\sqrt{-2\,y}}dy =$$

$$= \int_{-2}^{0}\left(\sqrt{2\,y^2}+\frac{(\sqrt{-2y})^2}{2}-\left(-\sqrt{2\,y^2}+\frac{(-\sqrt{-2y})^2}{2}\right)\right)dy =$$

$$= 2\sqrt{2}\int_{-2}^{0}|y|dy = -2\sqrt{2}\,\frac{y^2}{2}\Bigg|_{-2}^{0} = 4\sqrt{2}$$