Musterlösung zur Prüfung

(3 P)

1.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\downarrow 0}(\ln(e^x-\cos x)+\ln(\sin x)-2\ln(x))\\
=&\lim_{x\downarrow 0}(\ln((e^x-\cos x)\sin x)-\ln(x^2))\\
=&\lim_{x\downarrow 0}\ln\left(\frac{e^x\sin x-\cos x\sin x}{x^2}\right)\\
\overset{\text{BdH}}{=}&\ln\lim_{x\downarrow 0}\left(\frac{e^x\sin x+e^x\cos x+\sin^2 x-\cos^2 x}{2x}\right)\\
\overset{\text{BdH}}{=}&\ln\lim_{x\downarrow 0}\frac{1}{2}\left(2e^x\cos x+4\cos x\sin x\right)=\ln(1)=0.
\end{aligned}$$

(8 P)

2. **a)** Mit

$$\begin{aligned}
&\frac{2+3i}{3-2i}=\frac{(2+3i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{13}{13}i=i=e^{i\frac{\pi}{2}},\\
&(1+i)=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\quad\Rightarrow\quad(1+i)^4=(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^4=4e^{i\pi}=-4\\
&\sqrt{3}+i=2e^{i\frac{\pi}{6}}
\end{aligned}$$

erhält man

$$z=\frac{2+3i}{3-2i}e^{i\frac{\pi}{3}}\frac{(1+i)^4}{\sqrt{3}+i}=-2ie^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6})}=-2ie^{i\frac{\pi}{6}}=-2i\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}=1-\sqrt{3}i.$$

Somit sind

$$\mathrm{Re}(z)=1,\quad \mathrm{Im}(z)=-\sqrt{3},\quad |z|=|-2ie^{i\frac{\pi}{6}}|=2,\quad \arg(z)=\frac{5\pi}{3}.$$

b) Die Längen von z_2 und z_3 sind gleich:

$$\begin{aligned}
|z_2|&=\sqrt{(3+4i)(3-4i)}=\sqrt{25}=5\\
|z_3|&=\frac{1}{2}\sqrt{(7+i)(7-i)}=\frac{\sqrt{100}}{2}=5.
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

Die Multiplikation zweier komplexen Zahlen entspricht einer Drehstreckung, somit ermittelt man den Winkel α zwischen z_3 und z_2 via

$$\frac{z_2}{z_3} = \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{3+4i}{7+i} = \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{(3+4i)(7-i)}{(7+i)(7-i)} = \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{25+25i}{20} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i),$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Daraus folgt für die Winkel β des Dreiecks

$$\beta = \frac{\pi - \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{3\pi}{8}.$$

(5 P)

3. a) Mit

$$\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}, \qquad \cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$

ist

$$\sin^2(t) = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^2 = -\frac{1}{4}(e^{2it} - 2 + e^{-2it}) = -\frac{1}{4}(e^{2it} + e^{-2it}) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t)).$$

b)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin^2(t)\,dt &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t - t\cos(2t)\,dt \\
&= \frac{1}{4}t^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos(2t)\,dt \\
&= \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}\left(\frac{t}{2}\sin(2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)\,dt\right) \\
&= \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{8}\cos(2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{\pi^2 + 4}{16}.
\end{aligned}$$

(4 P)

4.

$$\operatorname{artanh}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}{1 - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\frac{2e^x}{e^x + e^{-x}}}{\frac{2e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}\right) = \frac{1}{2}\ln(e^{2x}) = x.$$

Siehe nächstes Blatt!

Mit

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1+e^{-2x})} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$

ist ausserdem

$$\tanh\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right) = \frac{(1-e^{-\ln(\frac{1+x}{1-x})})}{(1+e^{-\ln(\frac{1+x}{1-x})})} = \frac{(1-e^{\ln(\frac{1-x}{1+x})})}{(1+e^{\ln(\frac{1-x}{1+x})})} = \frac{1-(\frac{1-x}{1+x})}{1+(\frac{1-x}{1+x})} = x.$$

(11 P)

5. a)

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} = \frac{ax+bx+a-b}{x^2-1}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} a+b & = & 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -b \\ a-b & = & 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = 1+b = 1-a \end{array}\right\} \Rightarrow a = \frac{1}{2},\ b = -\frac{1}{2}.$$

Für $x \neq \pm 1$ ist

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x^2 - 1 \\ \int \frac{dx}{x^2-1} &= \int dt = t + c \\ \int \frac{dx}{x^2-1} &= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx \\ &= \frac{1}{2}(\ln|x-1| - \ln|x+1|) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{|x-1|}{|x+1|}\right) \\ \ln\left(\frac{|x-1|}{|x+1|}\right) &= 2t + 2c \\ \frac{|x-1|}{|x+1|} &= e^{2t+2c} = e^{2t}e^{2c} = Ce^{2t}, \quad C > 0 \end{aligned}$$

Fallunterscheidung:

$$\begin{aligned} -1 < x < 1: &\quad \frac{|x-1|}{|x+1|} = -\frac{x-1}{x+1}, \quad x(t) = \frac{1-Ce^{2t}}{1+Ce^{2t}} \\ x > 1 \vee x < -1: &\quad \frac{|x-1|}{|x+1|} = \frac{x-1}{x+1}, \quad x(t) = \frac{1+Ce^{2t}}{1-Ce^{2t}} \end{aligned}$$

b) Nein.
Aus

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) = x(t)^2 - 1$$

Bitte wenden!

ergeben sich die Gleichgewichtslösungen der Differentialgleichung

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1$$

und es ist $f(x) < 0$ für $x \in (-1, 1)$. Das bedeutet

$$f(x^*(t)) = \dot{x}^*(t) < 0,$$

$x^*(t)$ ist somit fallend.
Alternativ: Für $x^*(1) = -\dfrac{1}{2}$ erhält man

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \frac{1 - Ce^{2t}}{1 + Ce^{2t}} &= \lim_{t\to\infty} \frac{e^{2t}(e^{-2t} - C)}{e^{2t}(e^{-2t} + C)} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{(e^{-2t} - C)}{(e^{-2t} + C)} \\
&= -1.
\end{aligned}$$

6. Für **(8 P)**

$$\begin{aligned}
2x - y &= 2 \\
2x - y &= -5 \\
x + y &= -1 \\
x + y &= 3
\end{aligned}$$

bietet sich die Substitution

$$\begin{cases} u = 2x - y, & -5 \le u \le 2 \\ v = x + y, & -1 \le v \le 3 \end{cases}$$

an, woraus

$$x(u, v) = \frac{u + v}{3}, \qquad y(u, v) = \frac{2v - u}{3}.$$

Die Jakobideterminante ist dann

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3},$$

der Integrand

$$(2v - u)\cos\left(\left(\frac{2v - u}{3} - 2\frac{u + v}{3}\right)\pi\right) = (2v - u)\cos(-u\pi) = (2v - u)\cos(u\pi)$$

Siehe nächstes Blatt!

und somit

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\int_{-5}^{2}\int_{-1}^{3}(2v-u)\cos(u\pi)dvdu\\
=&\frac{1}{3}\int_{-5}^{2}(v^2\cos(u\pi)-uv\cos(u\pi))\Big|_{-1}^{3}du\\
=&\frac{1}{3}\int_{-5}^{2}(8\cos(u\pi)-4u\cos(u\pi))du\\
=&\frac{8}{3}\frac{\sin(u\pi)}{\pi}\Big|_{-5}^{2}-\frac{4}{3}\left(u\frac{\sin(u\pi)}{\pi}\Big|_{-5}^{2}-\frac{1}{\pi}\int_{-5}^{2}\sin(u\pi)du\right)\\
=&-\frac{4}{3\pi^2}\cos(u\pi)\Big|_{-5}^{2}\\
=&-\frac{8}{3\pi^2}.
\end{aligned}
$$

(25 P)

7. a) Es ist

$$\vec{e}=\frac{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},$$

und mit

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}2xy\\x^2+2y^2\end{pmatrix}$$

$$D_{\vec{e}}f(x,y)=\left\langle\begin{pmatrix}2xy\\x^2+2y^2\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle=\frac{2}{\sqrt{2}}xy-\frac{1}{\sqrt{2}}x^2-\frac{2}{\sqrt{2}}y^2.$$

Sei

$$g(x):=D_{\vec{e}}f(x,5)=\frac{10}{\sqrt{2}}x-\frac{1}{\sqrt{2}}x^2-\frac{50}{\sqrt{2}}.$$

Dann ist

$$g'(x)=\frac{10}{\sqrt{2}}-\frac{2x}{\sqrt{2}}=0\quad\Leftrightarrow\quad x=5$$

und da

$$g''(5)=-\frac{2}{\sqrt{2}}<0$$

wird die Richtungsableitung von f auf der Geraden $y=5$ in Richtung $\vec{e}$ an der Stelle $(5,5)$ maximal.

Bitte wenden!

b) Betrachte die Funktion

$$h(x,y,z) = f(x,y) - z = 0.$$

Dann ist

$$\bigtriangledown h(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 + 2y^2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und an der Stelle

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ f(0,3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 18 \end{pmatrix}$$

hat man

$$\bigtriangledown h(0,3,18) = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Somit ist die Koordinatengleichung der Tangentialebene an E in diesem Punkt

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-0 \\ y-3 \\ z-18 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 18y - z - 36 = 0.$$

c)

$$\bigtriangledown f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 + 2y^2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (0,0) \text{ ist kritischer Punkt.}$$

$$\left.\begin{array}{rcccl} -1 & \leq & x & \leq & 1: \ x \quad \text{monoton steigend} \\ 0 & \leq & y & \leq & 1: \ y \quad \text{monoton steigend} \\ -1 & \leq & y & \leq & 0: \ y \quad \text{monoton fallend} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad (0,0) \text{ ist ein Sattelpunkt.}$$

Oder, für x in einer Umgebung von 0

$$\left.\begin{array}{lcl} f(x,y) & > & 0, \quad \forall y > 0 \\ f(x,y) & < & 0, \quad \forall y < 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad (0,0) \text{ ist ein Sattelpunkt.}$$

Um die Extrema von f auf dem Rand von E zu bestimmen, parametrisiert man diesen

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi)$$

und betrachtet

$$h(t) := f(\cos(t), \sin(t)) = \cos^2(t)\sin(t) + \frac{2}{3}\sin^3(t)$$

$$h'(t) = -2\cos(t)\sin^2(t) + \cos^3(t) + 2\sin^2(t)\cos(t) = \cos^3(t) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad t_1 = \frac{\pi}{2}, \quad t_2 = \frac{3\pi}{2}$$

Siehe nächstes Blatt!

$$h(\frac{\pi}{2}) = \frac{3}{2}\sin^3(\frac{\pi}{2}) = \frac{3}{2}$$
$$h(\frac{3\pi}{2}) = \frac{3}{2}\sin^3(\frac{3\pi}{2}) = -\frac{3}{2}$$

Somit erricht f auf E das absolute Maximum im Punkt $(0,1)$ und das absolute Minimum im Punkt $(0,-1)$.

d) i) Eine mögliche Parametrisierung der Schnittkurve ist

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \cos^2(t)\sin(t) + \frac{2}{3}\sin^3(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

und mit

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ \cos^3(t) \end{pmatrix}, \quad G(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

ergibt sich für die Arbeit von G längs γ

$$\begin{aligned} A &= \int_\gamma \langle G(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)\rangle \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ \cos^3(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2(t) + \cos^2(t) + \sin(t)\cos^3(t) dt \\ &= 2\pi - \frac{\cos^4(t)}{4}\Big|_0^{2\pi} = 2\pi. \end{aligned}$$

ii) Mit

$$\operatorname{rot} G = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} \\ \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$a(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2y + \frac{2}{2}y^3 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \end{cases},$$

$$a_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2xy \end{pmatrix}, \quad a_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x^2+2y^2 \end{pmatrix}, \quad a_x \times a_y = \begin{pmatrix} -2xy \\ -x^2-2y^2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Bitte wenden!

folgt mit dem Satz von Stokes

$$
\begin{aligned}
A &= \oint_{\partial E} G = \iint_E \langle a_x \times a_y, \operatorname{rot} G(a(x,y))\rangle dxdy \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2xy \\ -x^2-2y^2 \\ 1 \end{pmatrix} dx\, dy \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2 - 2xy\, dy\, dx = \int_{-1}^{1} 2y - xy^2 \Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= 4 \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = 2(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)) \Big|_{-1}^{1} = 2\pi.
\end{aligned}
$$

Oder alternativ in Polarkoordinaten (Jakobideterminante r)

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2 - 2r^2 \cos(\varphi)\sin(\varphi)) r\, d\varphi\, dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2r - 2r^3 \cos(\varphi)\sin(\varphi)\, d\varphi\, dr = \int_0^1 2\pi\varphi + r^3 \cos^2(\varphi) \Big|_0^{2\pi} dr \\
&= 4\pi \int_0^1 r\, dr = 2\pi.
\end{aligned}
$$

(12 P)

8. **i)** Der Fluss des Vektorfeldes F durch ∂B ist definiert als

$$
\Phi_{\partial B} = \iint_{D(\partial B)} \langle (a_u(u,v) \times a_v(u,v)), F(a(u,v))\rangle\, du\, dv.
$$

Sei C der gerade Kreiszylinder mit Grundfläche E und $D = L \cap Z$. Dann ist

$$
\Phi_{\partial B} = \Phi_E + \frac{1}{2}\Phi_C + \Phi_D.
$$

Siehe nächstes Blatt!

Fluss durch E:

$$a(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} 0 \le r \le 1, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

$$n_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$F(a(r,\varphi)) = \begin{pmatrix} r^2 - 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wegen $\langle n_E, F(a(r,\varphi))\rangle = 0$ ergibt sich für den Fluss durch E:

$$\Phi_E = 0.$$

Fluss durch $\frac{1}{2}C$:

$$c(\varphi,z) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le z \le 6, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} n_C &= c_\varphi \times c_z \\ &= \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$F(c(\varphi,z)) = \begin{pmatrix} \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) - 1 \\ 0 \\ (1 - 2\cos(\varphi))z \end{pmatrix}$$

wegen $\langle n_C, F(c(\varphi,z))\rangle = 0$ ergibt sich für den Fluss durch $\frac{1}{2}C$:

$$\frac{1}{2}\Phi_C = 0.$$

Bitte wenden!

<u>Fluss durch D:</u>

<u>Kartesisch:</u>

$$a(x,y) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3+y \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

$$n_D = b_x \times b_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F(b(x,y)) = \begin{pmatrix} x^2+y^2-1 \\ 0 \\ (1-2x)(3+y) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_D &= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^2+y^2-1 \\ 0 \\ (1-2x)(3+y) \end{pmatrix} dy\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} 3y + \frac{y^2}{2} - 6xy - xy^2 \Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= 6 \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}(1-2x)\, dx \\
&= 6 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) - 2\sin(t)\cos^2(t)\, dx \\
&= 6 \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + \frac{2}{3}\cos^3(t) \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 3\pi.
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

<u>Polarkoordinaten:</u>

$$b(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ 3 + r\sin(\varphi) \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 0 \le r \le 1, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} n_D = b_r \times b_\varphi &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r\sin(\varphi)\cos(\varphi) - r\sin(\varphi)\cos(\varphi) \\ -r\sin^2(\varphi) - r\cos^2(\varphi) \\ r\sin^2(\varphi) + r\cos^2(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -r \\ r \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(b(r,\varphi)) &= \begin{pmatrix} r^2\cos^2(\varphi) + r^2\sin^2(\varphi) - 1 \\ 0 \\ (1 - 2r\cos(\varphi))(3 + r\sin(\varphi)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r^2 - 1 \\ 0 \\ 3 + r\sin(\varphi) - 6r\cos(\varphi) - 2r^2\sin(\varphi)\cos(\varphi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_D &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ -r \\ r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r^2 - 1 \\ 0 \\ 3 + r\sin(\varphi) - 6r\cos(\varphi) - 2r^2\sin(\varphi)\cos(\varphi) \end{pmatrix} d\varphi\, dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 3r + r^2\sin(\varphi) - 6r^2\cos(\varphi) - 2r^3\sin(\varphi)\cos(\varphi)\, d\varphi\, dr \\ &= \int_0^1 3r\varphi - r^2\cos(\varphi) - 6r^2\sin(\varphi) + r^3\cos^2(\varphi)\Big|_0^{2\pi}\, dr \\ &= 6\pi \int_0^1 r\, dr \\ &= 3\pi. \end{aligned}$$

Der Fluss durch ∂B ist dann

$$\Phi_{\partial B} = 0 + 0 + 3\pi = 3\pi.$$

ii) Der Satz von Gauss sagt

$$\Phi_{\partial B} = \iint_{D(\partial B)} \langle (a_u(u,v) \times a_v(u,v)), F(a(u,v)) \rangle\, du\, dv = \iiint_B \operatorname{div} F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz.$$

Bitte wenden!

Es ist

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 2x + 0 + 1 - 2x = 1.$$

Bezeichnet man mit C den geraden Kreiszylinder mit Grundfläche E und Höhe 6, so ergibt sich für den Fluss

$$\Phi_{\partial B} = \iiint\limits_B 1\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\iiint\limits_C 1\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\cdot\underbrace{E}_{\pi r^2}\cdot h = 3\pi.$$

Alternativ kann das Integral auch direkt bestimmt werden:
In Zylinderkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x(r,\varphi) \\ y(r,\varphi) \\ z(r,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} 0 \le r \le 1, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ 0 \le z \le r\sin(\varphi) + 3 \end{cases}$$

mit Jakobideterminante

$$\det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r$$

ergibt sich für den Fluss

$$\begin{aligned} \Phi_{\partial B} &= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} (3 + r\sin(\varphi))r\,d\varphi\,dr \\ &= \int\limits_0^1 3r\varphi - r^2\cos(\varphi)\Big|_0^{2\pi} = 6\pi\int\limits_0^1 r\,dr = 3\pi. \end{aligned}$$