

# Mathematik II

## Frühjahrssemester 2013

Prof. Dr. Erich Walter Farkas

Kapitel 8. Funktionen von mehreren Variablen  
8.2 Partielle Differentiation

- 1 Partielle Differentiation
- 2 Das totale oder vollständige Differential einer Funktion
- 3 Differentiation nach einem Parameter (Kettenregel)

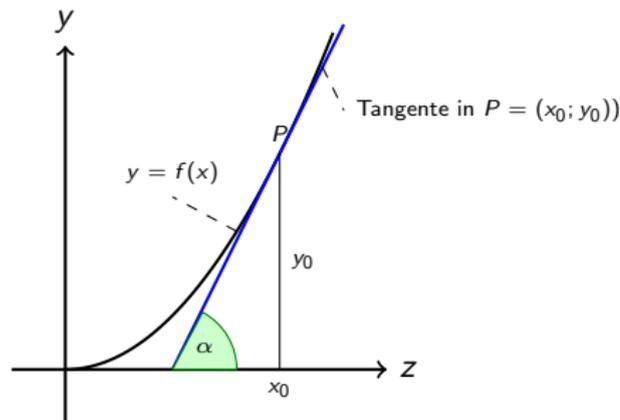
# Partielle Ableitungen 1.Ordnung

Wir erinnern zunächst an den Begriff der *Ableitung* bei einer Funktion von *einer* Variablen: Definitionsgemäss wird der Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

als 1.Ableitung der Funktion  $x \mapsto f(x)$  an der Stelle  $x_0$  bezeichnet.

Aus *geometrischer* Sicht lässt sich diese Ableitung als *Steigung*  $m$  der im Punkt  $P = (x_0; y_0)$  errichteten *Kurventangente* deuten:  $m = \tan(\alpha) = f'(x_0)$



# Partielle Ableitungen 1. Ordnung

Analoge Überlegungen führen bei einer Funktion von zwei Variablen, die sich geometrisch als Fläche im Raum darstellen lässt, zum Begriff *der partiellen Ableitung* einer Funktion.

## Definition

Unter den *partiellen Ableitungen 1. Ordnung* einer Funktion  $z = f(x; y)$  an der Stelle  $(x; y)$  werden die folgenden Grenzwerte verstanden (falls sie vorhanden sind):

- *Partielle Ableitung 1. Ordnung nach  $x$ :*

$$f_x(x; y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x}$$

- *Partielle Ableitung 1. Ordnung nach  $y$ :*

$$f_y(x; y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}$$

# Partielle Ableitungen 1.Ordnung

## Anmerkungen

- Weitere, allgemein übliche Symbole für *partielle Ableitungen* sind:

$$f_x(x; y), \quad z_x(x; y), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x; y), \quad \frac{\partial z}{\partial x}(x; y)$$

$$f_y(x; y), \quad z_y(x; y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x; y), \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x; y)$$

oder (in verkürzter Schreibe)

$$f_x, \quad z_x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$f_y, \quad z_y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} .$$

- *Geometrische* Deutung der partiellen Ableitungen von  $z = f(x; y)$  an der Stelle  $(x_0; y_0)$ :
  - $f_x(x_0; y_0)$ : *Anstieg* der Flächentangente im Flächenpunkt  $P = (x_0; y_0; z_0)$  in der  $x$ -Richtung.
  - $f_y(x_0; y_0)$ : *Anstieg* der Flächentangente im Flächenpunkt  $P = (x_0; y_0; z_0)$  in der  $y$ -Richtung.

# Partielle Ableitungen 1.Ordnung

## Beispiel

$$z = f(x; y) = -4x^3y^2 + 3xy^4 - 3x + 2y + 5$$

Wir bestimmen die *partiellen Ableitungen 1.Ordnung* dieser Funktion und berechnen ihre Werte an der Stelle  $x = 1, y = 2$ :

$$f_x(x; y) = \frac{\partial}{\partial x}(-4x^3y^2 + 3xy^4 - 3x + 2y + 5)$$

$$= -12x^2y^2 + 3y^4 - 3$$

$$f_y(x; y) = \frac{\partial}{\partial y}(-4x^3y^2 + 3xy^4 - 3x + 2y + 5)$$

$$= -8x^3y + 12xy^3 + 2$$

$$f_x(1; 2) = -3$$

$$f_y(1; 2) = 82$$

Die im Flächenpunkt  $P = (1; 2; 38)$  errichteten Tangenten besitzen somit den folgenden *Anstieg* bzw. *Steigungswinkel*:

- *Tangente in x-Richtung*:

$$m_x = \tan(\alpha) = -3 \Rightarrow \alpha = 180^\circ + \arctan(-3) = 108,4^\circ$$

- *Tangente in y-Richtung*:

$$m_y = \tan(\beta) = 82 \Rightarrow \beta = \arctan(82) = 89,3^\circ$$

# Partielles Differenzieren (Funktion von mehreren Variablen)

## Partielles Differenzieren bei einer Funktion von mehreren Variablen

Bei einer Funktion  $y = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$  von  $n$  unabhängigen Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  lassen sich insgesamt  $n$  *partielle Ableitungen 1. Ordnung* bilden. Man erhält sie nach dem folgenden Schema:

- 1 In der Funktionsgleichung werden zunächst alle unabhängigen Variablen bis auf die *Differentiationsvariable* (das ist die Variable, nach der differenziert werden soll) als *konstante* Größen, d.h als *Parameter* betrachtet.
- 2 Die gegebene Funktion erscheint nun als eine (gewöhnliche) Funktion von *einer* Variablen, nämlich der Differentiationsvariablen, und wird unter Verwendung der bekannten Ableitungsregeln nach dieser Variablen differenziert. Das Ergebnis dieser Differentiation ist die gesuchte *partielle Ableitung 1. Ordnung*.

# Partielles Differenzieren (Funktion von mehreren Variablen)

## Anmerkungen

- Die *partielle* Differentiation wird somit auf die *gewöhnliche* Differentiation, d.h auf die Differentiation einer Funktion von einer Variablen zurückgeführt!

Die Ableitungsregeln sind daher die gleichen wie bei den Funktionen von *einer* Variablen.

So lautet beispielweise die *Produktregel* bei *zwei* unabhängigen Variablen, d.h für eine Funktion vom Typ

$$z = f(x; y) = u(x; y) \cdot v(x; y) = u \cdot v$$

wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot v + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y} \cdot v + u \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

# Partielles Differenzieren (Funktion von mehreren Variablen)

- Wir differenzieren die *Zustandsgleichung des idealen Gases*  
 $p = p(V; T) = \frac{RT}{V}$  partiell nach  $V$  bzw.  $T$ :

$$\frac{\partial p}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{RT}{V} \right) = -\frac{RT}{V^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{RT}{V} \right) = \frac{R}{V}$$



$$z = f(x; y) = \underbrace{xy^2}_u \cdot \underbrace{(\sin(x) + \sin(y))}_v$$

Wir bilden die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial z}{\partial x}$  und  $\frac{\partial z}{\partial y}$  mit Hilfe der *Produktregel* und erhalten:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = u_x v + v_x u = y^2 \cdot (\sin(x) + \sin(y)) + xy^2 \cdot \cos(x)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = u_y v + v_y u = 2xy \cdot (\sin(x) + \sin(y)) + xy^2 \cdot \cos(y)$$

## Partielles Differenzieren (Funktion von mehreren Variablen)

## Beispiel



$$z = f(x; y) = \ln(x + y^2)$$

Wir führen zunächst die *Hilfsvariable*  $u = x + y^2$  ein, erhalten die *äussere* Funktion  $z = \ln(u)$  und wenden dann die *Kettenregel* an:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \\ &= \frac{1}{u} \cdot 1 = \frac{1}{x + y^2} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \\ &= \frac{1}{u} \cdot 1 = \frac{2y}{x + y^2} \end{aligned}$$

# Partielles Differenzieren (Funktion von mehreren Variablen)

## Beispiel

Wir bilden die *partiellen Ableitungen 1.Ordnung* der Funktion

$$u = f(x; y; z) = \sin(x - y) \cdot \cos(z + 2y)$$

und berechnen ihre Werte an der Stelle  $x = \pi$ ,  $y = 0$ ,  $z = \pi$ :

$$u_x(x; y; z) = \frac{\partial}{\partial x} [\sin(x - y) \cdot \cos(z + 2y)] = \cos(x - y) \cdot \cos(z + 2y)$$

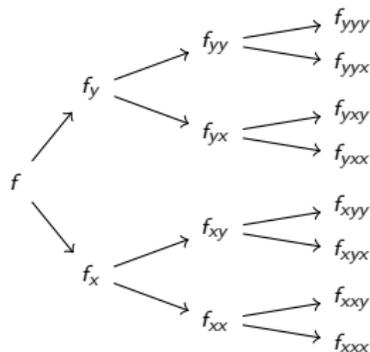
(unter Verwendung der *Kettenregel*)

$$\begin{aligned} u_y(x; y; z) &= \frac{\partial}{\partial y} [\sin(x - y) \cdot \cos(z + 2y)] \\ &= -\cos(x - y) \cdot \cos(z + 2y) + \sin(x - y) \cdot (-2 \sin(z + 2y)) \end{aligned}$$

# Partielle Ableitungen höherer Ordnung

Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge bei einer gemischten partiellen Ableitung  $k$ -ter Ordnung (Satz von Schwarz)

Bei einer *gemischten* partiellen Ableitung  $k$ -ter Ordnung darf die Reihenfolge der einzelnen Differentiationsschritte *vertauscht* werden, wenn die partiellen Ableitungen  $k$ -ter Ordnung *stetige* Funktionen sind.



Auf *partielle Ableitungen höherer Ordnung* stösst man, wenn man eine Funktion von mehreren unabhängigen Variablen *mehrmals* nacheinander *partiell differenziert*.

So erhält man beispielweise aus einer von *zwei* Variablen abhängigen Funktion  $z = f(x; y)$  nach dem folgenden Schema der Reihe nach *zwei* partielle Ableitungen 1. Ordnung, vier partielle Ableitungen 2. Ordnung etc.

# Partielle Ableitungen höherer Ordnung

## Anmerkungen

- Für die gemischten partiellen Ableitungen 2. bzw. 3. *Ordnung* einer Funktion  $z = f(x; y)$  gilt somit unter den Voraussetzungen des *Satzes von Schwarz*:

$$f_{xy} = f_{yx}$$

$$f_{xxy} = f_{yxx} = f_{xyx}$$

$$f_{yyx} = f_{yxy} = f_{xyy}$$

- Die Anzahl der (verschiedenen) partiellen Ableitungen 2. bzw. 3. Ordnung *reduziert* sich damit von vier auf drei bzw. von acht auf vier Ableitungen:

2. *Ordnung*:  $f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$

3. *Ordnung*:  $f_{xxx}, f_{xxy}, f_{xyy}, f_{yyy}$

# Partielle Ableitungen höherer Ordnung

## Beispiel

- Wir zeigen, dass die gemischten partiellen Ableitungen 2. Ordnung der Funktion  $z = \ln(x^2 + y)$  miteinander übereinstimmen:

$$z_x = \frac{\partial}{\partial x} [\ln(x^2 + y)] = \frac{2x}{x^2 + y}$$

$$z_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{2x}{x^2 + y} \right] = -\frac{2x}{(x^2 + y)^2}$$

$$z_y = \frac{\partial}{\partial y} [\ln(x^2 + y)] = \frac{1}{x^2 + y}$$

$$z_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{x^2 + y} \right] = -\frac{2x}{(x^2 + y)^2}$$

$$z_{xy} = z_{yx}$$

# Geometrische Betrachtungen

Die Rolle, die die *Kurventangente* bei einer Funktion von *einer* Variablen spielt, übernimmt bei einer Funktion  $z = f(x; y)$  von zwei Variablen die sog. *Tangentialebene*.

## Gleichung einer Tangentialebene

Die Gleichung der *Tangentialebene* an die Fläche  $z = f(x; y)$  im Flächenpunkt  $P = (x_0; y_0; z_0)$  mit  $z_0 = f(x_0; y_0)$  lautet in symmetrischer Schreibweise wie folgt:

$$z - z_0 = f_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0)$$

# Geometrische Betrachtungen

## Beispiel

- Wir bestimmen die *Gleichung der Tangentialebene* an die Bildfläche von  $z = f(x; y) = x^2 + y^2$  im Flächenpunkt  $P = (1; 1; 2)$ :

$$f_x(x; y) = 2x \quad \Rightarrow \quad f_x(1; 1) = 2$$

$$f_y(x; y) = 2y \quad \Rightarrow \quad f_y(1; 1) = 2$$

Die Gleichung der gesuchten *Tangentialebene* lautet damit nach Gleichung:

$$z - 2 = 2(x - 1) + 2(y - 1) \quad \text{oder} \quad z = 2x + 2y - 2$$

# Definition des totalen oder vollständigen Differentials

## Definition

Unter dem *totalen* oder *vollständigen Differential* einer Funktion  $z = f(x; y)$  von zwei unabhängigen Variablen wird die *lineare Differentialausdruck*

$$dz = f_x dx + f_y dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

verstanden.

# Definition des totalen oder vollständigen Differentials

Das *totale Differential* besitzt somit die folgende *geometrische* Bedeutung:

## Geometrische Deutung eines totalen oder vollständigen Differentials

Bei einer Funktion  $z = f(x; y)$  von zwei unabhängigen Variablen beschreibt das *totale* oder *vollständige Differential*

$$dz = f_x dx + f_y dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

die *Änderung* der Höhenkoordinate bzw. des Funktionswertes  $z$  auf der im Berührungspunkt  $P = (x_0; y_0; z_0)$  errichteten *Tangentialebene*.

Dabei sind die *Differentiale*  $dx, dy, dz$  die Koordinaten eines *beliebigen* Punktes auf der Tangentialebene, *bezogen auf den Punkt P*.

# Definition des totalen oder vollständigen Differentials

## Definition

Unter dem *totalen* oder *vollständigen Differential* einer Funktion  $y = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$  von  $n$  unabhängigen Variablen versteht man den linearen Differentialausdruck

$$\begin{aligned} dy &= f_{x_1} dx_1 + f_{x_2} dx_2 + \dots + f_{x_n} dx_n \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \end{aligned}$$

## Anmerkungen

- Das *totale Differential* einer Funktion beschreibt *näherungsweise*, wie sich der Funktionswert bei *geringfügigen* Veränderungen der unabhängigen Variablen um  $dx_i = \Delta x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) ändert.

Es gilt

$$\Delta y \simeq dy = f_{x_1} \Delta x_1 + f_{x_2} \Delta x_2 + \dots + f_{x_n} \Delta x_n$$

- Eine *geometrische* Deutung des *totalen Differentials* ist bei Funktionen von *mehr als zwei* unabhängigen Variablen *nicht mehr* möglich.

# Definition des totalen oder vollständigen Differentials

## Beispiele

- Ein *ideales Gas* genügt der *Zustandsgleichung*  $p(V; T) = \frac{RT}{V}$ .  
Das *totale Differential* dieser Funktion lautet somit:

$$\begin{aligned} dp &= \frac{\partial p}{\partial V} dV + \frac{\partial p}{\partial T} dT \\ &= -\frac{RT}{V^2} dV + \frac{R}{V} dT \end{aligned}$$



$$z = f(x; y) = 4x^2 - 3xy^2 + x \cdot \exp(y)$$

Man berechne den Zuwachs der Höhenkoordinate  $z$  auf der zugehörigen Bildfläche bzw. auf der *Tangentialebene* an der Stelle  $x = 1$ ,  $y = 0$  für die Koordinatenänderungen  $dx = \Delta x = -0,1$  und  $dy = \Delta y = 0,2$ .

# Definition des totalen oder vollständigen Differentials

Lösung des Beispiels:

- **Zuwachs  $\Delta z$  auf der Bildfläche**

$$\begin{aligned}x = 1, y = 0 &\Rightarrow x = 1 - 0,1 = 0,9, y = 0 + 0,2 = 0,2 \\ \Delta z &= f(0,9; 0,2) - f(1; 0) = 4,23 - 5 = -0,77\end{aligned}$$

- **Zuwachs  $dz$  auf der Tangentialebene**

Für die Berechnung des *totalen Differentials*  $dz$  benötigen wir zunächst die *partiellen Ableitungen 1. Ordnung*. Sie lauten:

$$\begin{aligned}f_x(x; y) &= 8x - 3y^2 + \exp(y) \\ f_y(x; y) &= -6xy + x \cdot \exp(y)\end{aligned}$$

An der Stelle  $x = 1, y = 0$  gilt dann:

$$f_x(1; 0) = 9, f_y(1; 0) = 1$$

Damit ist

$$dz = f_x(1; 0)dx + f_y(1; 0)dy = 9 \cdot (-0,1) + 1 \cdot (0,2) = -0,7$$

# Definition des totalen oder vollständigen Differentials

- Geometrische Interpretation**

Der Stelle  $x = 1$ ,  $y = 0$  entspricht  $z = f(1, 0) = 5$  und damit der *Flächenpunkt*  $P = (1; 0; 5)$ .

Die Koordinatenänderungen  $dx = \Delta x = -0,1$  und  $dy = \Delta y = 0,2$  beschreiben eine *Verschiebung des Punktes*  $P$  auf der *Fläche* bzw. auf der in  $P$  errichteten *Tangentialebene*.

Dabei *verliert* der Punkt  $P$  in beiden Fällen an Höhe. Seine neue Lage ist  $Q$  bzw.  $Q'$ :

$$P = (1; 0; 5) \xrightarrow[\text{der Fläche}]{\text{Verschiebung auf}} Q = (0,9; 0,2; 4,23)$$

$$P = (1; 0; 5) \xrightarrow[\text{der Tangentialebene}]{\text{Verschiebung auf}} Q' = (0,9; 0,2; 4,3)$$

# Kettenregel für Funktionen mit einem Parameter

## Kettenregel für Funktionen mit einem Parameter

$z = f(x; y)$  sei eine Funktion der beiden unabhängigen Variablen  $x$  und  $y$ , diese wiederum von einem Parameter  $t$  abhängig:

$$x = x(t), y = y(t) \quad (t_1 \leq t \leq t_2)$$

Dann ist die durch Einsetzen dieser Parametergleichungen in die Funktionsgleichung  $z = f(x; y)$  erhaltene Funktion

$$z = f(x(t); y(t)) = F(t) \quad (t_1 \leq t \leq t_2)$$

eine *zusammengesetzte, verkettete oder mittelbare* Funktion dieses Parameters, deren Ableitung nach der folgenden *Kettenregel* gebildet wird:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial z}{\partial y} y'(t)$$

# Kettenregel für Funktionen mit einem Parameter

## Kettenregel für Funktionen mit einem Parameter

Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} z = f(x; y) & : \text{Äussere Funktion} \\ x = x(t), y = y(t) & : \text{Innere Funktionen} \end{aligned}$$

### Anmerkungen

- Eine häufig verwendete Kurzschreibweise für die *Kettenregel* lautet:

$$\dot{z} = \dot{F} = z_x \dot{x} + z_y \dot{y}$$

- Die *Kettenregel* lässt sich sinngemäss auch auf die Funktionen von *mehr als zwei unabhängigen Variablen* übertragen.

Sie lautet zum Beispiel für eine Funktion  $u = f(x, y, z)$  der drei unabhängigen Variablen  $x$ ,  $y$ , und  $z$ , die jeweils noch von einem Parameter  $t$  abhängen ( $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ ), wie folgt:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial u}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial u}{\partial z} z'(t)$$

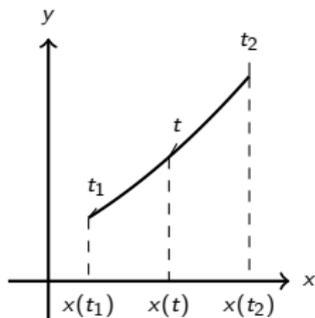
# Kettenregel für Funktionen mit einem Parameter

## Anmerkungen

- Die Parametergleichungen  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  definieren bekanntlich eine *Kurve C* in der  $x, y$ -Ebene.

Die *verkettete* Funktion  $z = F(t)$  beschreibt dann die Abhängigkeit der Höhenkoordinate  $z$  vom Kurvenparameter  $t$ , die Ableitung  $\dot{z} = \dot{F}(t)$  die *Änderungsgeschwindigkeit* dieser Höhenkoordinate längs der Kurve (wiederum in Abhängigkeit von  $t$ ).

Man spricht daher in diesem Zusammenhang auch von der *Ableitung der Funktion  $z = f(x; y)$  längs in der Kurve C*.



# Kettenregel für Funktionen mit einem Parameter

## Beispiele

- $z = f(x; y) = x^2y + y^3$  mit  $x = x(t) = t^2$ ,  $y = y(t) = e^t$   
Wir bilden zunächst die benötigten Ableitungen:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 3y^2, \quad \frac{dx}{dt} = 2t, \quad \frac{dy}{dt} = e^t$$

Für die gesuchte Ableitung von  $z$  nach dem Parameter  $t$  folgt dann mit Hilfe der *Kettenregel*:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \\ &= 2xy \cdot 2t + (x^2 + 3y^2) \cdot e^t \\ &= 2t^2 \cdot e^t \cdot 2t + (t^4 + 3e^{2t}) \cdot e^t \\ &= (4t^3 + t^4 + 3 \cdot e^{2t}) \cdot e^t \end{aligned}$$